Вычисление по формулам (I, 47) дает

$$E=\frac{3r\,(rd)-r^2d}{r^5}. \qquad (15,18)$$

Поле электронейтральной системы на далеких расстояниях убывает по закону $E\sim\frac{1}{r^3}$ и обладает резко выраженной асимметрией. В полярных координатах (r,θ) его слагающие (согласно I, 71) имеют вид

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{2d\cos\theta}{r^3} \text{ — радиальная слагающая,}$$

$$E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{d\sin\theta}{r^3} \text{ — меридиональная слагающая.}$$

§ 16. Квадрупольный момент

Если дипольный момент электронейтральной системы зарядов равен нулю, в разложении потенциала (15,9) следует учитывать член разложения φ_2.

Примером электронейтральной системы с дипольным моментом, равным нулю, может служить система из двух равных по величине диполей, с противоположными направлениями дипольных моментов, находящихся на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Такая система носит название квадруполя.

Потенциал поля, создаваемого квадруполем, имеет вид

$$\varphi\approx\varphi_2=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{\alpha,\beta}e_ix'_{i\alpha}x'_{i\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (16,1)$$

Для получения φ следует вычислить выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{x_\beta}{r^3}=$$

$$=-x_\beta\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r^3}\right)-\frac{1}{r^3}\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}=-\frac{1}{r^3}\delta_{\alpha\beta}+\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, α, β принимают значения 1, 2, 3; x_α, x_β — сокращенная запись координат $x_1=x$; $x_2=y$; $x_3=z$. Тогда имеем

$$\varphi_c=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\sum_i e_ix'_{i\alpha}x'_{i\beta}\left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right).$$

Совокупность величин $\left(e_ix'_{i\alpha}x'_{i\beta}\right)$ является тензором второго ранга. Этот тензор называют квадрупольным моментом системы и обозначают $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{\alpha\beta}=\sum_i e_ix'_{i\alpha}x'_{i\beta}. \qquad (16,2)$$

Если перейти к непрерывно распределенным зарядам, квадрупольный момент можно записать так:

$$D_{\alpha\beta}=\int \rho x'_\alpha x'_\beta\, dV'. \tag{16,2'}$$

При этом

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta} D_{\alpha\beta}\left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right). \tag{16,3}$$

Опуская для краткости индекс суммирования по всем частицам, можем написать выражение для φ_2 в координатном представлении:

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\sum e\left\{x'^2\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+y'^2\left(\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+\right.$$
$$\left.+z'^2\left(\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+2x'y'\cdot\frac{3xy}{r^5}+2x'z'\cdot\frac{3xz}{r^5}+2y'z'\cdot\frac{3yz}{r^5}\right\}.$$

Прибавляя равную нулю величину

$$\frac{(r')^2}{3}\cdot\frac{3}{r^3}\cdot\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}-1\right)$$

и перегруппировывая члены, это выражение записывают обычно в виде

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\sum e\left\{\left(x'^2-\frac{r'^2}{3}\right)\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+\right.$$
$$+\left(y'^2-\frac{r'^2}{3}\right)\left(\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+\left(z'^2-\frac{r'^2}{3}\right)\left(\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+$$
$$\left.+2x'y'\cdot\frac{3xy}{r^5}+2x'z'\cdot\frac{3xz}{r^5}+2y'z'\cdot\frac{3yz}{r^5}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta} D_{\alpha\beta}\left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right). \tag{16,4}$$

При этом квадрупольный момент $D_{\alpha\beta}$ определен как

$$D_{\alpha\beta}=\sum_i e_i\left(x'_{i\alpha}x'_{i\beta}-\frac{r'^2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{16,5}$$

Совокупность величин $D_{\alpha\beta}$ легко записать в явном виде:

$$D_{xx}=\sum e_i\left[(x'_i)^2-\frac{(r'_i)^2}{3}\right],\qquad D_{xy}=D_{yx}=\sum e_i x'_i y'_i,$$
$$D_{yy}=\sum e_i\left[(y'_i)^2-\frac{(r'_i)^2}{3}\right],\qquad D_{yz}=D_{zy}=\sum e_i y'_i z'_i,$$
$$D_{zz}=\sum e_i\left[(z'_i)^2-\frac{(r'_i)^2}{3}\right],\qquad D_{zx}=D_{xz}=\sum e_i x'_i z'_i.$$

Все девять величин $D_{\alpha\beta}$, образующих квадрупольный момент, зависят, очевидно, только от расположения и величины зарядов в системе.

Из определения (16,5) ясно, что тензор квадрупольного момента является симметричным, так что

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}.$$

Симметричный тензор второго ранга имеет шесть независимых компонент.

Заметим, далее, что сумма всех диагональных компонент квадрупольного момента равна нулю:

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0. \tag{16,6}$$

Это снижает число независимых компонентов квадрупольного момента до пяти.

Как и всякий симметричный тензор, $D_{\alpha\beta}$ можно привести к главным осям. Эта процедура совершенно аналогична приведению к главным осям тензора моментов инерции в механике. Именно, произведем поворот системы координат. При этом координатам x'_i, y'_i, z'_i будут отвечать новые координаты x_i, y_i, z_i. Коэффициенты соответствующего линейного преобразования подберем так, чтобы компоненты $D_{\alpha\beta}$ с разными значениями индексов α и β обратились в нуль. Можно показать, что такой подбор коэффициентов всегда возможен.

В новых координатах:

$$D_1 = \frac{1}{3}\sum e_i(2x_{i1}^2 - x_{i2}^2 - x_{i3}^2) = D_{11},$$

$$D_2 = \frac{1}{3}\sum e_i(2x_{i2}^2 - x_{i1}^2 - x_{i3}^2) = D_{22},$$

$$D_3 = -(D_1 + D_2) = D_{33}.$$

Важным случаем является система зарядов, расположение которых симметрично относительно оси. Пусть осью симметрии служит ось x_3. Условие симметрии относительно оси x_3 позволяет написать

$$\sum e_i x_{i1}^2 = \sum e_i x_{i2}^2,$$

так что квадрупольный момент имеет компоненты:

$$D_1 = \frac{1}{3}\sum e_i(x_{i1}^2 - x_{i3}^2) = -\frac{D}{2},$$

$$D_2 = \frac{1}{3}\sum e_i(x_{i2}^2 - x_{i3}^2) = -\frac{D}{2},$$

$$D_3 = D.$$

Знак величины D называют знаком квадрупольного момента. Потенциал поля квадруполя равен согласно (16,4)

$$\varphi_2 = -\frac{3}{4} D \frac{r^2 - 3x_3^2}{r^5} = -\frac{3}{4} D \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3},$$

где θ — угол между осью симметрии x_3 и радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки наблюдения. Написанный закон убывания потенциала поля квадруполя с расстоянием r имеет вполне общий характер, так что всегда

$$\varphi_2 \sim \frac{1}{r^3}.$$

Соответственно, поле убывает по закону

$$|E| \sim \frac{1}{r^4}.$$

Если система зарядов как целое не является электронейтральной, то величина дипольного момента зависит, как мы уже указывали в предыдущем параграфе, от выбора начала координат. То же относится и к квадрупольному моменту. Для случая системы с полным зарядом, отличным от нуля, удобно поместить начало координат в точку с координатой

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum e_i \mathbf{r}_i}{\sum e_i}.$$

Эту точку можно назвать центром заряда системы. Если поместить начало координат в центр заряда, то дипольный момент системы зарядов автоматически обращается в нуль. Это не относится, однако, к ее квадрупольному моменту. Именно, если расположение зарядов в системе не является сферически-симметричным, то все или некоторые компоненты квадрупольного момента отличны от нуля. Поэтому наличие у системы зарядов квадрупольного момента позволяет судить о характере симметрии системы. Так, например, наличие осевой симметрии приводит к написанному выше распределению поля.

В связи с этим обстоятельством важное значение имело обнаружение квадрупольного момента у ряда атомных ядер. Наличие квадрупольного момента ядер показало, что форма их является несферической.

Если расположение зарядов в системе обладает весьма высокой симметрией, ее квадрупольный момент может оказаться равным нулю; как пример укажем на систему из восьми зарядов, расположенных в вершинах бесконечно малого параллелепипеда с правильным чередованием знаков зарядов. Такая система зарядов, носящая название октуполя, не имеет ни дипольного, ни квадрупольного моментов. Потенциал поля октуполя получается при учете четвертого члена в разложении (15,9).

Если учитывать последующие члены разложения (15,9), можно получить потенциал поля мультиполей любого порядка.

§ 17. Работа и энергия во внешнем электростатическом поле

Согласно сказанному выше, работу перемещения пробного заряда из одной точки поля в другую можно выразить через изменение потенциала в виде

$$W=\int_1^2 \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{l}=\varepsilon\int_1^2 \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=-\varepsilon\int_1^2 \operatorname{grad}\varphi\,d\boldsymbol{l}=\varepsilon[\varphi(\boldsymbol{r}_1)-\varphi(\boldsymbol{r}_2)]=-\varepsilon\Delta\varphi. \tag{17,1}$$

Если происходят перемещения зарядов системы, то работа перемещения на вектор $d\boldsymbol{l}_i$ равна

$$dW=\sum e_i\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}_i.$$

В дальнейшем нам понадобится выражение для работы поля над системой зарядов, отнесенной к единице времени (мощности). Для нее находим

$$\frac{dW}{dt}=\sum e_i\boldsymbol{E}\frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt}=\sum e_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_i. \tag{17,2}$$

В случае распределенных зарядов

$$\frac{dW}{dt}=\int \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}\,dV=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV. \tag{17,3}$$

Зная работу перемещения пробного заряда, можно записать его потенциальную энергию в электростатическом поле:

$$-\delta U(\boldsymbol{r})=\delta W=-\varepsilon\,\delta\varphi(\boldsymbol{r}),$$

где $U(\boldsymbol{r})$ — потенциальная энергия в точке $\boldsymbol{r}$ и $\varphi(\boldsymbol{r})$ — электростатический потенциал в той же точке. Вид потенциальной энергии не зависит от выбора системы координат. Поэтому соотношение

$$U=\varepsilon\varphi \tag{17,4}$$

справедливо не только в декартовых, но и в любых обобщенных координатах q_i. Обобщенные силы, действующие на пробный заряд, можно написать в виде

$$Q_i=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \tag{17,5}$$