октуполя получается при учете четвертого члена в разложении (15,9).

Если учитывать последующие члены разложения (15,9), можно получить потенциал поля мультиполей любого порядка.

## § 17. Работа и энергия во внешнем электростатическом поле

Согласно сказанному выше, работу перемещения пробного заряда из одной точки поля в другую можно выразить через изменение потенциала в виде

$$W = \int_1^2 \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{l} = \varepsilon \int_1^2 \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\varepsilon \int_1^2 \operatorname{grad}\varphi\,d\boldsymbol{l} = \varepsilon[\varphi(\boldsymbol{r}_1) - \varphi(\boldsymbol{r}_2)] = -\varepsilon\,\Delta\varphi. \tag{17,1}$$

Если происходят перемещения зарядов системы, то работа перемещения на вектор $d\boldsymbol{l}_i$ равна

$$dW = \sum e_i \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}_i.$$

В дальнейшем нам понадобится выражение для работы поля над системой зарядов, отнесенной к единице времени (мощности). Для нее находим

$$\frac{dW}{dt} = \sum e_i \boldsymbol{E}\frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum e_i \boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_i. \tag{17,2}$$

В случае распределенных зарядов

$$\frac{dW}{dt} = \int \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{E}\,dV = \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV. \tag{17,3}$$

Зная работу перемещения пробного заряда, можно записать его потенциальную энергию в электростатическом поле:

$$-\delta U(\boldsymbol{r}) = \delta W = -\varepsilon\,\delta\varphi(\boldsymbol{r}),$$

где $U(\boldsymbol{r})$ — потенциальная энергия в точке $\boldsymbol{r}$ и $\varphi(\boldsymbol{r})$ — электростатический потенциал в той же точке. Вид потенциальной энергии не зависит от выбора системы координат. Поэтому соотношение

$$U = \varepsilon\varphi \tag{17,4}$$

справедливо не только в декартовых, но и в любых обобщенных координатах $q_i$. Обобщенные силы, действующие на пробный заряд, можно написать в виде

$$Q_i = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \tag{17,5}$$

Формулы (17,4) и (17,5) легко перенести на случай, когда вместо пробного заряда во внешнее поле помещена произвольная система зарядов. При этом предполагается, что внешнее поле $\boldsymbol{E}$ является сильным по сравнению с полем, создаваемым зарядами системы. Кроме того, считается, что потенциал внешнего поля достаточно медленно изменяется от точки к точке. Потенциальная энергия системы зарядов записывается следующим образом:

$$U = \sum e_i \varphi(\boldsymbol{r}'_i), \tag{17,6}$$

где $\varphi(\boldsymbol{r}'_i)$ — потенциал внешнего поля в точке $\boldsymbol{r}'_i$. Выбрав начало координат внутри системы, можно написать потенциал в виде

$$\varphi(\boldsymbol{r}'_i) = \varphi(x', y', z'),$$

где $x'$, $y'$, $z'$ — расстояния от начала координат до заряда. Воспользуемся теперь медленностью изменения потенциала внешнего поля в области пространства, занятой зарядами. Медленно изменяющуюся функцию $\varphi$ можно разложить в ряд по величинам $x'$, $y'$, $z'$, характеризующим протяженность системы, и ограничиться первыми членами разложения. Это дает

$$\varphi(\boldsymbol{r}') \approx \varphi(0, 0, 0) + x'\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + z'\frac{\partial\varphi}{\partial z'} =$$
$$= \varphi(0) + \boldsymbol{r}' \operatorname{grad}\varphi = \varphi(0) - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{E}(0).$$

Здесь $\varphi(0)$ и $\boldsymbol{E}(0)$ — соответственно потенциал и напряженность внешнего поля в начале координат. Подставляя последнее выражение для $\varphi(\boldsymbol{r}')$ в (17,6), находим

$$U = \sum e_i \varphi(\boldsymbol{r}'_i) \approx \sum e_i \varphi(0) - \sum e_i \boldsymbol{r}'_i \boldsymbol{E}(0) =$$
$$= \varphi(0) \sum e_i - \boldsymbol{E}(0) \sum e_i \boldsymbol{r}'_i = e\varphi(0) - \boldsymbol{E}(0)\boldsymbol{d}. \tag{17,7}$$

В первом приближении потенциальная энергия системы зарядов во внешнем поле равна энергии одного заряда величиной $e = \sum e_i$, находящегося в начале координат. В случае электронейтральной системы $e = 0$ и

$$U = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{d} = -Ed\cos\theta, \tag{17,8}$$

где $\theta$ — угол между дипольным моментом системы и вектором внешнего поля.

Найдем обобщенные силы, действующие на систему (считая последнюю недеформируемой, так что расположение зарядов в системе фиксировано). Обобщенная сила, отвечающая координатам $x$, $y$, $z$, равна

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}),$$

или, раскрывая градиент произведения по формуле (I,47) и учитывая, что $\boldsymbol{d}$ — постоянный вектор, получаем

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{d}\operatorname{grad})\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{d}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{d}\operatorname{grad})\boldsymbol{E}. \qquad (17,9)$$

В однородном поле ($\boldsymbol{E} = \mathrm{const}$) на электронейтральную систему с дипольным моментом не действуют силы, стремящиеся сместить ее в пространстве. Такие силы имеются лишь в поле, неоднородном в пространстве.

Обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате $\theta$, определяющей ориентацию вектора дипольного момента, согласно известному положению классической механики [1]), представляет момент силы

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = Ed\sin\theta. \qquad (17,10)$$

Вращательный момент стремится повернуть систему так, чтобы ее дипольный момент был ориентирован параллельно полю.

Полученные формулы позволяют без труда найти закон взаимодействия заряд — диполь и диполь — диполь. При этом под $\boldsymbol{E}(0)$ следует понимать поле, создаваемое в точке 0, соответственно, зарядом и диполем.

Для потенциальной энергии взаимодействия заряд — диполь находим

$$U = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{d} = -\frac{e\boldsymbol{r}\boldsymbol{d}}{r^3}, \qquad (17,11)$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный от заряда к системе и равный по величине расстоянию от заряда до системы (пространственными размерами которой в этом приближении мы должны пренебречь).

Потенциальная энергия взаимодействия диполь — диполь равна, согласно (15,18),

$$U = -\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{E}_2 = \frac{(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2)r^2 - 3(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{r})}{r^5} \qquad (17,12)$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий оба диполя.

---

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, т. I, Механика, «Наука», 1966.