§ 18. Энергия взаимодействия системы зарядов и энергия электростатического поля

Перейдем к вычислению энергии системы взаимодействующих зарядов. Простейшим путем эта энергия может быть вычислена следующим образом. Пусть в некоторой точке пространства закреплен заряд e_1. Заряд e_2, находящийся первоначально на бесконечности, перемещается в некоторую точку, находящуюся на расстоянии r_{12} от первого заряда. При этом внешним источником против сил поля должна быть произведена работа

$$W_{12} = e_2[\varphi_1(r_{12}) - \varphi_1(r \to \infty)] = e_2\varphi_1(r_{12}).$$

Поскольку потенциал поля первого заряда на бесконечности равен нулю, $\varphi_1(r_{12})$ представляет потенциал поля первого заряда в точке r_{12}, равный

$$\varphi_1(r_{12}) = \frac{e_1}{r_{12}}.$$

Поэтому работа перемещения второго заряда

$$W_{12} = \frac{e_1e_2}{r_{12}}.$$

Поднося к системе из двух зарядов третий заряд, необходимо произвести работу

$$W_{123} = \frac{e_1e_3}{r_{13}} + \frac{e_2e_3}{r_{23}}.$$

Продолжая такое построение системы из N зарядов, находим, что для этого необходимо затратить работу

$$W = \frac{e_1}{2}\left[\frac{e_2}{r_{12}} + \frac{e_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{e_N}{r_{1N}}\right] + \\ + \frac{e_2}{2}\left[\frac{e_1}{r_{21}} + \frac{e_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{e_N}{r_{2N}}\right] + \ldots = \frac{1}{2}\sum_i\sum_k \frac{e_ie_k}{r_{ik}} \quad (i \neq k). \quad (18,1)$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ введен потому, что в сумме встречаются дважды равные члены, отвечающие каждой паре частиц, например, $\frac{e_1e_2}{r_{12}}$ и $\frac{e_2e_1}{r_{21}}$. Чтобы не вводить сложного ограничения на выполнение суммирования, в (18,1) учитываются все члены такого типа, а результат уменьшается в два раза.

Вводя в рассмотрение потенциал φ_i, который создается всеми зарядами, кроме i-го, в месте расположения последнего, (18,1) можно переписать в виде

$$W = \frac{1}{2}\sum e_i\varphi_i.$$

Произведенная работа сближения равна потенциальной энергии, запасенной в системе частиц. Таким образом,

$$U=\frac{1}{2}\sum e_i\varphi_i=\frac{1}{2}\sum\frac{e_ie_k}{r_{ik}}. \qquad (18,2)$$

Переходя от точечных зарядов к непрерывной функции распределения плотности заряда, можно написать (18,2) в виде

$$U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,dV=\frac{1}{2}\int\int\frac{\rho(\boldsymbol r)\,\rho(\boldsymbol r')}{|\boldsymbol r-\boldsymbol r'|}\,dV\,dV'. \qquad (18,3)$$

Потенциальная энергия взаимодействия (18,2) определяется мгновенным расположением всех зарядов в системе. Формулы (18,2) и (18,3) можно интерпретировать следующим образом: каждый заряд, входящий в систему, обладает потенциальной энергией $\frac{e_i\varphi_i}{2}$; энергия системы слагается из энергий входящих в нее зарядов.

Преобразуем теперь формулу (18,3), воспользовавшись уравнениями поля. Выражая ρ через $\boldsymbol E$ по (14,1), находим с помощью (18,3)

$$U=\frac{1}{8\pi}\int\varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol E\,dV=\frac{1}{8\pi}\left[\int\mathrm{div}\,(\varphi\boldsymbol E)\,dV-\int\boldsymbol E\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dV\right]=$$
$$=\int\frac{E^2}{8\pi}\,dV+\frac{1}{8\pi}\oint\varphi\boldsymbol E\,d\boldsymbol S.$$

Интеграл по бесконечной поверхности исчезает, поскольку при $r\to\infty$ имеем

$$\varphi<\frac{1}{r};\quad E<\frac{1}{r^2};\quad S\sim r^2.$$

Поэтому находим окончательно

$$U=\int\frac{E^2}{8\pi}\,dV. \qquad (18,4)$$

Формула (18,4) вполне эквивалентна (18,3). Однако она не содержит никаких величин, характеризующих электрические заряды.

Совершенно ясно, что выражение (18,4) является частным случаем общего выражения для энергии электромагнитного поля, а его вывод — частным случаем доказательства, приведенного в § 12. Существенно, однако, то, что в рамках электростатики нельзя отдать преимущество какой-либо из двух альтернативных формул (18,3) и (18,4). Поскольку в формуле (18,3) не содержится никаких характеристик поля, в электростатике поле можно трактовать как вспомогательный, чисто математический прием описания взаимодействия между частицами.

Состояние системы и ее энергия в электростатике определяются исключительно величинами зарядов и их взаимным расположением.

Ранее мы уже подчеркивали, что в общем случае системы движущихся зарядов и переменных во времени полей ситуация коренным образом отличается от электростатической. Электромагнитное поле в общем случае не может трактоваться как математический образ. Оно является физическим объектом, реальность которого является столь же полной, как и реальность заряженных частиц.

Интересно применить формулу (18,4) к одиночному элементарному заряду — электрону или протону. Его энергия равна

$$U = e\varphi(0),$$

где $\varphi(0)$ — потенциал поля в той точке, в которой находится сам заряд. Поскольку рассматриваемое поле является полем самого заряда, его потенциал $\varphi = \frac{e}{r}$ неограниченно возрастает при стремлении r к нулю. Это означает, что точечная частица имела бы бесконечно большую собственную энергию.

Таким образом, представление о частицах как о точечных объектах, не имеющих пространственной протяженности, приводит к физически бессмысленному результату. В связи с этим был сделан ряд попыток построить электродинамическую теорию элементарных частиц, обладающих конечными размерами (теория протяженного электрона), но эта теория, оказалось, противоречила основным положениям теории относительности (см. вторую часть курса).

В вопросе о собственной энергии элементарного заряда классическая электродинамика столкнулась с непреодолимой трудностью. Было ясно, что законы классической электродинамики, находившиеся в прекрасном согласии с опытными фактами в области макроскопической физики, имеют ограниченную область применимости. При переходе к весьма малым расстояниям они должны подвергнуться существенным изменениям. О границах применимости классической электродинамики мы еще будем говорить в следующих параграфах этого раздела.