ГЛАВА III

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 19. Поле системы зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение

Следующим по степени сложности является случай поля зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение.

Медленным движением системы зарядов мы будем называть движение со скоростями $|\boldsymbol{v}|$, малыми по сравнению с величиной c, которая является единственной характерной величиной размерности скорости, содержащейся в уравнениях Максвелла. Мы увидим в дальнейшем, что c — это скорость распространения в пространстве всех электромагнитных взаимодействий.

Таким образом, предположение о медленном движении зарядов означает, что при таком движении можно пренебречь конечностью скорости распространения электромагнитных полей (см. § 23). При медленном движении можно приближенно считать, что поле в каждый момент времени определяется мгновенным расположением зарядов.

Под квазистационарным движением мы будем понимать движение зарядов в некоторой ограниченной области, за пределы которой они не выходят во все время движения. В этой области заряды могут двигаться периодическим или непериодическим образом. В последнем случае, однако, за весьма большое время частицы неизбежно будут проходить если не через те же самые последовательности состояний, как при периодическом движении, то во всяком случае через последовательности близких состояний. Иными словами, движение будет почти периодическим. Ниже будет показано, что в этих условиях в уравнениях Максвелла производные от полей по времени малы по сравнению с пространственными производными. Отсюда термин — квазистационарное (как бы стационарное) движение.

Поскольку частицы не могут выйти за границы области, на ограничивающей ее поверхности S_1 должно выполняться условие:

$$j_n = 0. \tag{19,1}$$

Здесь j_n — слагающая плотности тока, нормальная к поверхности.

При медленном движении зарядов изменение плотности заряда по времени можно считать малым, т. е. можно положить

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

Тогда (5,4) дает

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0. \tag{19,2}$$

Таким образом, при квазистационарном движении зарядов вектор плотности имеет соленоидальный характер. Иными словами, квазистационарный характер движения зарядов позволяет представить их траектории в виде некоторых замкнутых трубок или нитей. Каждая из таких трубок замыкается сама на себя внутри области движения. Такое представление особенно наглядно в случае макроскопических постоянных токов, идущих, например, по замкнутым проводникам (см. § 17 части IV).

Для каждой замкнутой трубки с током имеет место равенство

$$\boldsymbol{j}\,dV=\boldsymbol{j}\,dS\,dl=j\,dS\,\boldsymbol{dl}=dI\,\boldsymbol{dl}, \tag{19,3}$$

где dS — сечение и $j\,dS$ — постоянный ток, протекающий по сечению трубки; dl — элемент ее длины. Направления векторов $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{dl}$, очевидно, совпадают. Интеграл от плотности тока по всему объему

$$\int\boldsymbol{j}\,dV=\int\oint dI\,\boldsymbol{dl}=\int dI\oint\boldsymbol{dl}=0,$$

поскольку интеграл по замкнутой трубке $\oint\boldsymbol{dl}=0$. Смысл этого равенства весьма прост. Рассмотрим, например, его x-ю проекцию. Интеграл $\int j_x\,dy\,dz$ представляет полный ток через плоскость (yz), секущую трубки тока. В квазистационарном состоянии системы полный ток через любое сечение равен нулю. Число зарядов, проходящих по нормали к сечению через все трубки тока в обоих направлениях, дожно быть одинаковым, поскольку заряды совершают движение в ограниченном объеме пространства

Перейдем теперь к формулировке уравнений Максвелла для поля системы зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение. Чтобы выяснить, какие упрощения можно внести в систему уравнений Максвелла для такого движения, оценим (по порядку величины) входящие в них члены. Подобные методы оценок широко применяются в теоретической физике.

Начнем с оценок производных по времени, фигурирующих в уравнениях Максвелла. Поскольку рассматриваемая система совершает периодическое или почти периодическое движение, можно по порядку величины оценить величины $\left|\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right|$ и $\left|\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right|$, написав

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right| \sim \frac{E}{T}, \quad \left|\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right| \sim \frac{H}{T},$$

где T — характерный период движения. Величины E и H означают характерные средние абсолютные значения напряженностей поля в области пространства, занятой системой зарядов. Разумеется, не имеет смысла стремиться к уточнению этих величин, относя их к определенному моменту времени или определенной точке пространства. Написанные соотношения имеют смысл грубых оценок порядка величин.

Найдем, далее, порядок величин $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ в той же области пространства. Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в реальных системах, совершающих квазистационарное движение, изменяются от точки к точке, вообще говоря, достаточно плавно. Если обозначить через L средние размеры системы, то все пространственные производные по порядку величины можно оценить следующим образом:

$$\left|\frac{\partial E}{\partial x}\right| \sim \left|\frac{\partial E}{\partial y}\right| \sim \left|\frac{\partial E}{\partial z}\right| \sim \frac{E}{L}.$$

При этом мы отвлекаемся от распределения поля в системе, его конкретной зависимости от различных координат.

Условие квазистационарности заключается в том, чтобы временны́е изменения полей происходили достаточно медленно, так чтобы в уравнениях Максвелла можно было опустить члены, содержащие производные по времени с соответствующим коэффициентом, как малые по сравнению с членами, характеризующими пространственное изменение полей. Для этого дожны выполняться (по порядку величины) неравенства:

$$\left|\frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right| \gg \frac{1}{c}\left|\frac{\partial H_i}{\partial t}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right| \gg \frac{1}{c}\left|\frac{\partial E_i}{\partial t}\right|$$

или

$$\frac{H}{L} \gg \frac{1}{c}\frac{E}{T}, \quad \frac{E}{T} \gg \frac{1}{c}\frac{H}{T}. \tag{19,4}$$

При этом одновременно должны выполняться приближенные равенства

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial E_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial H_k}{\partial x_i},$$

так что разности пространственных производных, входящих в уравнение Максвелла, взаимно компенсируют друг друга, а временные производные (с коэффициентом $1/c$) оказываются величинами старшего порядка малости. Перемножая эти неравенства (19,4), приходим к условию квазистационарности:

$$T \gg \frac{L}{c}. \tag{19,5}$$

Неравенство (19,5) или эквивалентное ему неравенство

$$c \gg \frac{L}{T} \approx v, \tag{19,5'}$$

где величину $v \sim \frac{L}{T}$ можно интерпретировать как характерную скорость движения зарядов в системе, имеют наглядный смысл. При квазистационарном движении зарядов их скорости должны быть малы по сравнению со скоростью распространения поля.

Электромагнитные поля, для которых справедливо неравенство (19,5) и в которых можно пренебречь, как малым, током смещения, носят название квазистационарных полей.

Для квазистационарных полей уравнения Максвелла приобретают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{19,6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{19,7}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{19,8}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{19,9}$$

Таким образом, в приближении квазистационарных полей ток смещения не входит в уравнения поля. Мы видели уже, что отсутствие тока смещения отвечает соленоидальному характеру линий тока. Обратно, если трубки тока являются почти замкнутыми, а движение зарядов — происходящим в ограниченном объеме и почти периодическим, то ток смещения должен быть очень мал по сравнению с током зарядов.

Система уравнений Максвелла оказывается распавшейся на уравнения для независимых полей: магнитного поля токов и электрического поля зарядов.

Плотность заряда ρ в уравнении (19,9) зависит от времени, как от параметра. В приближении медленно движущихся зарядов, решение уравнений для электрического поля приводит к очевидному результату: в каждый момент времени электрическое поле совпадает с электростатическим полем данной конфигурации зарядов.

Магнитное поле системы зарядов, совершающих медленное стационарное движение, будет найдено интегрированием (19,6)—(19,7). Введем вектор-потенциал по формуле (10,1). Поскольку зависимостью плотности зарядов ρ и тока j от времени можно пренебречь, напряженности магнитного и электрического полей, а следовательно, и электромагнитные потенциалы также не зависят от времени. Поэтому уравнение для вектора-потенциала (10,6) и соотношение Лоренца (10,5) приобретают соответственно вид

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{19,10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{19,11}$$

Уравнение (19,10) представляет совокупность трех скалярных уравнений Пуассона:

$$\Delta A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i \qquad (i = x,\ y,\ z).$$

Мы будем предполагать, что все компоненты вектора-потенциала системы зарядов, совершающих медленное и стационарное движение, убывают на бесконечности не медленнее, чем по закону $\frac{1}{r}$:

$$A_i \sim O\left(\frac{1}{r}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{19,12}$$

Здесь символ O означает, что отбрасываемые члены имеют порядок малости выше $\frac{1}{r}$. Решение уравнения (19,10), удовлетворяющее требованию (19,12), может быть написано по формуле (3,16) в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,dV'}{R} = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(x',\,y',\,z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}, \tag{19,13}$$

где $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ — плотность тока в точке $\boldsymbol{r}'$, а $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ — расстояние от этой точки до точки наблюдения $\boldsymbol{r}$, в которой ищется значение вектора-потенциала.

Нетрудно видеть, что решение (19,13) уравнения (19,10) удовлетворяет условию (19,11). Действительно,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\operatorname{div}_r \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,dV'}{R} = \frac{1}{c}\int \operatorname{div}_r\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\right) dV',$$

где дивергенция берется по координатам точки наблюдения (текущим координатам). Ввиду независимости операций дифференцирования по координатам $\boldsymbol{r}$ и интегрирования по координатам $\boldsymbol{r}'$ порядок их можно изменить. Плотность тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ можно было бы вынести за знак div_r, но это нецелесообразно.

Замена переменной дифференцирования по формуле, аналогичной (I, 18), дает

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\int \operatorname{div}_{r'}\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\right) dV' = -\frac{1}{c}\oint \frac{\boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{S}}{R} = -\frac{1}{c}\oint \frac{j_n\,dS}{R} = 0,$$

в силу условия (19,1).

Таким образом, формула (19,13) дает решение задачи, удовлетворяющее всем необходимым условиям. Зная вектор-потенциал, можно найти магнитное поле

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\int \frac{\boldsymbol{j}\,dV'}{R} = \frac{1}{c}\int \operatorname{rot}_r \frac{\boldsymbol{j}\,dV'}{R}. \qquad (19,14)$$

При дифференцировании по координатам $\boldsymbol{r}$ плотность тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ должна считаться постоянной. Тогда по формуле (I, 43) находим

$$\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{j}}{R} = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R},\ \boldsymbol{j}\right] = \frac{[\boldsymbol{j}\boldsymbol{R}]}{R^3}.$$

Поэтому окончательно

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\boldsymbol{j}\boldsymbol{R}]}{R^3}\,dV'. \qquad (19,15)$$

Формула (19,15) носит название закона Био и Савара. Она дает принципиальное решение поставленной задачи. Однако вычисление интеграла в формуле (19,15) достаточно сложно и может быть проведено до конца только для некоторых простейших систем.

Для нахождения поля одиночного заряда, движущегося в пустоте, формула (19,15) применена в следующем параграфе. Однако она особенно важна для расчета полей токов, текущих по проводникам. Поэтому дальнейшие примеры расчетов с помощью закона Био и Савара будут разобраны в § 19 ч. IV книги.

Подчеркнем, что все результаты этого параграфа, в частности закон Био и Савара, имеют приближенный характер. Они являются следствием соотношений (19,5). Квазистационарные поля особенно часто встречаются при рассмотрении электромагнитных процессов в материальных средах. Поэтому мы вернемся еще к ним в ч. IV (§ 22), где будет проведено более подробное обсуждение условий, при которых поле можно считать квазистационарным.

В заключение приведем соотношение, которое понадобится нам в дальнейшем. Очень часто размеры той области пространства, в которой рассматривается воздействие магнитного поля на систему, достаточно малы, и в пределах этой области магнитное поле можно считать постоянным и однородным. Тогда вектор-потенциал A этого постоянного однородного поля можно представить в виде

$$A=\frac{[Hr]}{2}. \tag{19,16}$$

В правильности этого соотношения можно убедиться непосредственным вычислением по формуле (I, 45).

§ 20. Поле одиночного заряда, совершающего медленное равномерное движение

Рассмотрим одиночный заряд e, движущийся с постоянной скоростью v_0. Мы будем предполагать, что $|v_0|\ll c$ (см. ниже, § 23).

Плотность заряда ρ может быть представлена в виде

$$\rho(\boldsymbol{r},\ t)=e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)). \tag{20,1}$$

Здесь $\boldsymbol{r}_0(t)$ — координата заряда в момент времени t. Формула (20,1) означает, что весь заряд в каждый данный момент времени находится в точке пространства с координатой $\boldsymbol{r}_0(t)$. Уравнения Максвелла для электрического поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)).$$

Поскольку поле имеет безвихревой характер, можно ввести потенциал $\varphi(\boldsymbol{r},t)$, так что

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$$

Потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi=-4\pi e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)).$$

Решение последнего уравнения согласно (0,0) может быть написано в виде

$$\varphi=\int\frac{\rho\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=e\int\frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'=\frac{e}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)|}=\frac{e}{R(t)}. \tag{20,2}$$

Через $\boldsymbol{R}(t)$ обозначен вектор, соединяющий точку наблюдения с мгновенной координатой заряда $\boldsymbol{r}_0(t)$.

Из формулы (20,2) следует, что электрическое поле движущегося заряда формально совпадает с полем неподвижного заряда, но вместо фиксированного расстояния от данной точки наблюдения до заряда, в (20,2) фигурирует переменное во времени расстояние $R(t)$. Поле заряда дается, очевидно, формулой

$$\boldsymbol{E}=\frac{e\boldsymbol{R}(t)}{R^3(t)}. \tag{20,3}$$