вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ этого постоянного однородного поля можно представить в виде

$$\boldsymbol{A}=\frac{[\boldsymbol{Hr}]}{2}. \tag{19,16}$$

В правильности этого соотношения можно убедиться непосредственным вычислением по формуле (I, 45).

§ 20. Поле одиночного заряда, совершающего медленное равномерное движение

Рассмотрим одиночный заряд e, движущийся с постоянной скоростью v_0. Мы будем предполагать, что $|v_0|\ll c$ (см. ниже, § 23).

Плотность заряда ρ может быть представлена в виде

$$\rho(\boldsymbol{r},\ t)=e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)). \tag{20,1}$$

Здесь $\boldsymbol{r}_0(t)$ — координата заряда в момент времени t. Формула (20,1) означает, что весь заряд в каждый данный момент времени находится в точке пространства с координатой $\boldsymbol{r}_0(t)$. Уравнения Максвелла для электрического поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)).$$

Поскольку поле имеет безвихревой характер, можно ввести потенциал $\varphi(\boldsymbol{r},t)$, так что

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$$

Потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi=-4\pi e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)).$$

Решение последнего уравнения согласно (0,0) может быть написано в виде

$$\varphi=\int\frac{\rho\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=e\int\frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'=\frac{e}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)|}=\frac{e}{R(t)}. \tag{20,2}$$

Через $\boldsymbol{R}(t)$ обозначен вектор, соединяющий точку наблюдения с мгновенной координатой заряда $\boldsymbol{r}_0(t)$.

Из формулы (20,2) следует, что электрическое поле движущегося заряда формально совпадает с полем неподвижного заряда, но вместо фиксированного расстояния от данной точки наблюдения до заряда, в (20,2) фигурирует переменное во времени расстояние $R(t)$. Поле заряда дается, очевидно, формулой

$$\boldsymbol{E}=\frac{e\boldsymbol{R}(t)}{R^3(t)}. \tag{20,3}$$

Поскольку заряд движется равномерно, его положение в пространстве можно написать в виде

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 t.$$

Поэтому напряженность электрического поля в точке будет зависеть от времени по закону

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_0 t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_0 t|^3}. \tag{20,4}$$

Очевидно, что в некоторой точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t напряженность поля будет такая же, как в точке с координатой $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_0$ в момент времени $t+1$. Действительно,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0, t+1) = \frac{e[\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_0(t+1)]}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_0(t+1)|^3} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t).$$

Это означает, что точка с данным значением напряженности поля равномерно движется в пространстве вместе с зарядом. При этом поле сохраняет сферическую симметрию относительно точки, характеризующей мгновенное положение заряда. В дальнейшем мы сравним формулу (20,4) с соответствующим выражением для поля, создаваемого зарядом, движущимся со скоростью $|v_0| \approx c$.

Перейдем теперь к определению магнитного поля. Оно может быть найдено по формуле (19,15), в которой плотность тока для единичного заряда можно написать в виде

$$\boldsymbol{j} = e\boldsymbol{v}_0 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0).$$

Подставляя значение $\boldsymbol{j}$ в (19,15), находим

$$\boldsymbol{H} = \frac{e}{c}\int \frac{[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}']\,\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\,dV' = \frac{e}{c}\frac{[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{R}]}{R_0^3} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}]. \tag{20,5}$$

Таким образом, магнитное поле оказывается перпендикулярным к электрическому полю и перпендикулярным к скорости заряда. Абсолютная величина $|\boldsymbol{H}| \sim \frac{v_0}{c}|\boldsymbol{E}|$, причем всегда $\frac{v_0}{c} < 1$. Дифференцированием по формуле (I, 45), можно убедиться, что вектор $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет уравнению (19,7).

Мы разбирали без вычислений вопрос о нахождении поля движущегося заряда в § 9. При этом было указано, что если поверхность интегрирования S_2 (рис. 4) проходит через точку, в которой находится в данный момент движущийся заряд, магнитное поле связывается с током заряда $\boldsymbol{j}$. Эта картина отвечает произведенному нами расчету.

Формула (20,5) была получена, как результат решения уравнений (19,6) и (19,7), в которых ток смещения отсутствовал.

Можно, однако, найти значение магнитного поля, не пользуясь формулой (19,15), по току смещения на произвольной поверхности S_1.

Напишем уравнения для магнитного поля в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e\boldsymbol{v}_0 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{20,6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{20,7}$$

Зависимость электрического поля $\boldsymbol{E}$ равномерно движущегося заряда от времени задается формулой (20,4). Дифференцируя по времени, находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} v_z\right) = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E}.$$

Согласно (I, 45) имеем

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{E} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v}_0 - (\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = \\ = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E},$$

поскольку $\boldsymbol{v}_0$ — постоянный вектор. Отсюда находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] - \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \\ = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] - 4\pi \boldsymbol{v}_0 e \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{20,8}$$

в силу (20,1).

Подставляя значение (20,8) в (20,6), имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}]. \tag{20,9}$$

Решением (20,9), удовлетворяющим (20,7), служит (20,5). Мы видим, таким образом, что оба способа расчета приводят, как и следовало ожидать, к одному и тому же результату.

§ 21. Поле системы зарядов, совершающих квазистационарное движение, на больших расстояниях от системы

Предположим, что некоторая совокупность зарядов совершает медленное и квазистационарное движение в ограниченной области пространства. Часто основной интерес представляет электромагнитное поле этой системы на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы (размерами области движения). При этом, как и в случае электростатики, общая формула (19,3) для вектора-потенциала допускает существенное упрощение.