Можно, однако, найти значение магнитного поля, не пользуясь формулой (19,15), по току смещения на произвольной поверхности S_1.

Напишем уравнения для магнитного поля в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e\boldsymbol{v}_0 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{20,6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{20,7}$$

Зависимость электрического поля $\boldsymbol{E}$ равномерно движущегося заряда от времени задается формулой (20,4). Дифференцируя по времени, находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} v_z\right) = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E}.$$

Согласно (I, 45) имеем

$$\operatorname{rot} [\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{E} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v}_0 - (\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = \\ = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E},$$

поскольку $\boldsymbol{v}_0$ — постоянный вектор. Отсюда находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] - \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \\ = \operatorname{rot} [\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] - 4\pi \boldsymbol{v}_0 e \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{20,8}$$

в силу (20,1).

Подставляя значение (20,8) в (20,6), имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} [\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}]. \tag{20,9}$$

Решением (20,9), удовлетворяющим (20,7), служит (20,5). Мы видим, таким образом, что оба способа расчета приводят, как и следовало ожидать, к одному и тому же результату.

§ 21. Поле системы зарядов, совершающих квазистационарное движение, на больших расстояниях от системы

Предположим, что некоторая совокупность зарядов совершает медленное и квазистационарное движение в ограниченной области пространства. Часто основной интерес представляет электромагнитное поле этой системы на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы (размерами области движения). При этом, как и в случае электростатики, общая формула (19,3) для вектора-потенциала допускает существенное упрощение.

Воспользуемся разложением (15,8), написав

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} - \left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right).$$

Подставляя $\frac{1}{R}$ в (19,13), находим

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{r} \int \boldsymbol{j}\, dV' - \frac{1}{c} \int \boldsymbol{j} \left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dV'.$$

В силу (19,4) первый интеграл для системы, совершающий стационарное движение, равен нулю. Поэтому

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c} \int \boldsymbol{j} \left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dV'. \tag{21,1}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (21,1) с помощью тождества

$$\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) \equiv \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) - \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\}.$$

Первую скобку можно представить в виде тройного векторного произведения

$$\left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) - \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} = \left[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}] \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right] = -\frac{[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,\boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

Таким образом, вектор-потенциал можно представить в виде

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2c} \int \frac{[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,\boldsymbol{r}]\, dV}{r^3} - \frac{1}{2c} \int \left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j}, \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} dV'.$$

Займемся вычислением второго интеграла. Вводя, согласно общей теории § 19, трубки тока, можно написать

$$\boldsymbol{j}\, dV' = dI\, d\boldsymbol{l} = dI\, d\boldsymbol{r}'.$$

Действительно, изменение положения заряда $d\boldsymbol{r}'$ при движении по трубке тока тождественно с $d\boldsymbol{l}$. Поэтому

$$I = \int \left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j}, \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} dV' = \\ = \int dI \oint \left\{d\boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(d\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} = \\ = \int dI \oint d\left(\boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right) = 0,$$

так как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала всегда равен нулю.

Таким образом, окончательно

$$A=\frac{1}{2cr^3}\int[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\boldsymbol{r}]\,dV'=\frac{1}{2cr^3}\left[\int[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,dV'.\ \boldsymbol{r}\right]. \qquad (21,2)$$

Введем обозначение

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2c}\int[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,dV'. \qquad (21,3)$$

Величина $\boldsymbol{M}$ именуется магнитным моментом системы зарядов. Она зависит исключительно от свойств системы зарядов — распределения плотности токов и геометрии системы. Ниже мы увидим, что $\boldsymbol{M}$ действительно является в известной мере аналогом дипольного момента системы неподвижных зарядов.

Вектор-потенциал вдали от системы приобретает вид

$$\boldsymbol{A}=\frac{[\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}]}{r^3}. \qquad (21,4)$$

При этом магнитное поле согласно (I, 45) выражается формулой

$$\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{rot}\frac{[\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}]}{r^3}=\boldsymbol{M}\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-(\boldsymbol{M}\operatorname{grad})\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Поскольку дифференцирование ведется по координатам точки наблюдения, магнитный момент системы при дифференцировании является постоянным.

Согласно (I, 42) находим

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\boldsymbol{r}\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\operatorname{div}\boldsymbol{r}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.$$

Далее,

$$(\boldsymbol{M}\operatorname{grad})\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{M}\operatorname{grad})\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{M}\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\right)=\frac{\boldsymbol{M}}{r^3}-\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r})}{r^5}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{H}=\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r})-r^2\boldsymbol{M}}{r^5}. \qquad (21,5)$$

Мы видим, что магнитное поле системы медленно и квазистационарно движущихся зарядов вдали от системы выражается такой же формулой, как электростатическое поле системы покоящихся зарядов. Различие заключается в том, что вместо дипольного момента $\boldsymbol{d}$ в (15,18), в формуле (21,5) стоит магнитный момент системы $\boldsymbol{M}$.

§ 22. Магнитный момент

Рассмотрим несколько подробнее свойства магнитного момента системы. Прежде всего нетрудно убедиться, что значение магнитного момента не зависит от выбора начала координат. Смещая начало координат на постоянный вектор $\boldsymbol{a}$, т. е.