Таким образом, окончательно

$$A = \frac{1}{2cr^3} \int [[r'j] r] \, dV' = \frac{1}{2cr^3} \left[ \int [r'j] \, dV' \cdot r \right]. \tag{21,2}$$

Введем обозначение

$$M = \frac{1}{2c} \int [r'j] \, dV'. \tag{21,3}$$

Величина $M$ именуется магнитным моментом системы зарядов. Она зависит исключительно от свойств системы зарядов — распределения плотности токов и геометрии системы. Ниже мы увидим, что $M$ действительно является в известной мере аналогом дипольного момента системы неподвижных зарядов.

Вектор-потенциал вдали от системы приобретает вид

$$A = \frac{[Mr]}{r^3}. \tag{21,4}$$

При этом магнитное поле согласно (I, 45) выражается формулой

$$H = \operatorname{rot} A = \operatorname{rot} \frac{[Mr]}{r^3} = M \operatorname{div} \frac{r}{r^3} - (M \operatorname{grad}) \frac{r}{r^3}.$$

Поскольку дифференцирование ведется по координатам точки наблюдения, магнитный момент системы при дифференцировании является постоянным.

Согласно (I, 42) находим

$$\operatorname{div} \frac{r}{r^3} = r \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \operatorname{div} r = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Далее,

$$(M \operatorname{grad}) \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^3} (M \operatorname{grad}) r + r \left( M \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} \right) = \frac{M}{r^3} - \frac{3r(Mr)}{r^5}.$$

Поэтому

$$H = \frac{3r(Mr) - r^2 M}{r^5}. \tag{21,5}$$

Мы видим, что магнитное поле системы медленно и квазистационарно движущихся зарядов вдали от системы выражается такой же формулой, как электростатическое поле системы покоящихся зарядов. Различие заключается в том, что вместо дипольного момента $d$ в (15,18), в формуле (21,5) стоит магнитный момент системы $M$.

## § 22. Магнитный момент

Рассмотрим несколько подробнее свойства магнитного момента системы. Прежде всего нетрудно убедиться, что значение магнитного момента не зависит от выбора начала координат. Смещая начало координат на постоянный вектор $a$, т. е.

полагая $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'' + \boldsymbol{a}$, находим

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,dV' = \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{r}''\boldsymbol{j}]\,dV' + \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{a}\boldsymbol{j}]\,dV'$$

Переписав появившийся дополнительный член в виде

$$\int [\boldsymbol{a}\boldsymbol{j}]\,dV' = \left[\boldsymbol{a}\int \boldsymbol{j}\,dV'\right],$$

мы видим, что в силу (19,4) он равен нулю.

Таким образом, магнитный момент, подобно дипольному моменту нейтральной системы зарядов, представляет величину, зависящую только от физических свойств системы, но не от выбора начала отсчета.

Рассмотрим выражение магнитного момента для случая, когда заряды движутся по одной нити или трубке. Пользуясь (19,3), находим

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\int dI\,[\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}] = \frac{I}{c}\,\frac{1}{2}\int [\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}]. \qquad (22,1)$$

Нетрудно заметить, что величина $\frac{1}{2}[\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}]$ представляет вектор площади. Интеграл $\boldsymbol{S} = \int \frac{[\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}]}{2}$ представляет площадь боковой поверхности конуса, опирающегося на контур с током. В частном случае плоского замкнутого контура за $\boldsymbol{S}$ можно выбрать вектор нормали к площади контура, умноженный на величину площади. Можно записать

$$\boldsymbol{M} = \frac{I\boldsymbol{S}}{c}. \qquad (22,2)$$

Формула (22,2) допускает наглядную интерпретацию: всякий замкнутый ток (например, одна или несколько заряженных частиц, движущихся по замкнутым траекториям) обладает магнитым моментом, пропорциональным величине тока В этой связи заметим, что каждый атом с электронами, обращающимися по орбите, является элементарным магнитом (см. ч. IV). Перепишем теперь выражение для магнитного момента, выразив плотность тока через скорость движения зарядов:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{r}',\,\rho\boldsymbol{v}]\,dV' = \frac{1}{2c}\sum [\boldsymbol{r}'_i,\,e\boldsymbol{v}_i], \qquad (22,3)$$

где суммирование ведется по всем зарядам в системе.

Рассмотрим важный случай системы, состоящей из одинаковых частиц или из разных частиц, но обладающих одинаковыми значениями отношения заряда $e$ к массе $m$. Вводя это отношение в (22,3), находим

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c} \sum \frac{e_i}{m_i} [\boldsymbol{r}'_i, \; m_i \boldsymbol{v}_i] = \frac{e}{2mc} \sum [\boldsymbol{r}'_i \boldsymbol{p}_i] = \frac{e}{2mc} \boldsymbol{L}, \qquad (22,4)$$

где $\boldsymbol{L}$ — механический момент системы.

Формула (22,4) показывает, что для системы частиц с постоянным значением $\frac{e}{m}$ между магнитным и механическим моментом системы существует прямая пропорциональность.

Пропорциональность между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{L}$ имеет место также в системе, состоящей из двух частиц при произвольном отношении $\frac{e}{m}$. Действительно, в такой системе

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c} \{ e_1 [\boldsymbol{r}'_1 \boldsymbol{v}_1] + e_2 [\boldsymbol{r}'_2 \boldsymbol{v}_2] \}.$$

Поместив начало координат в центр инерции, т. е. положив

$$m_1 \boldsymbol{r}'_1 + m_2 \boldsymbol{r}'_2 = 0,$$

и вводя относительную скорость

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot{\boldsymbol{r}}'_2 - \dot{\boldsymbol{r}}'_1 = \dot{\boldsymbol{r}}'_{\text{отн}},$$

находим

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{\text{отн}} \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \qquad \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_{\text{отн}} \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

откуда

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu^2}{2c} \left\{ \frac{e_1}{m_1^2} [\boldsymbol{r}'_{\text{отн}} \boldsymbol{v}_{\text{отн}}] + \frac{e_2}{m_2^2} [\boldsymbol{r}'_{\text{отн}} \boldsymbol{v}_{\text{отн}}] \right\} = \frac{1}{2c} \left( \frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \mu \boldsymbol{L},$$

где $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}'_{\text{отн}} \boldsymbol{p}_{\text{отн}}] = [\boldsymbol{r}'_{\text{отн}} \mu \boldsymbol{v}_{\text{отн}}]$ — момент относительного движения и $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса.