ГЛАВА IV

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

§ 23. Электромагнитное поле системы произвольно движущихся зарядов

Рассмотрим систему зарядов, совершающих произвольное движение в некотором объеме V'. Распределение и движение зарядов в этом объеме будем характеризовать плотностью заряда $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и плотностью тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, изменяющимися в пространстве и во времени. Мы будем предполагать, что функции $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ известны в любой момент времени (т. е. при $-\infty < t < \infty$).

Уравнения для электромагнитных потенциалов, зависящих от координат и времени, имеют вид

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\boldsymbol{r}, t), \tag{23,1}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t), \tag{23,2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0. \tag{23,3}$$

Система уравнений (23,1)—(23,3) представляет систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Как известно из теории дифференциальных уравнений в частных производных, однозначное решение задачи, — в данном случае нахождение конкретного распределения электромагнитного поля в пространстве и во времени в зависимости от значений известных функций $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, требует задания некоторых дополнительных условий, именуемых граничными и начальными условиями.

Обычно задача о нахождении электромагнитного поля ставится следующим образом: до некоторого момента времени $t = 0$ (т. е. при всех значениях времени $t < 0$) заряды в системе были неподвижны; начиная с момента времени $t = 0$ заряды находятся в движении и движение это произвольное. При этом в электромагнитном поле возникает изменение или, как говорят, возмущение. Мы будем предполагать, что в уравнениях (23,1)—(23,3) фигурируют векторный и скалярный потенциалы именно этого возмущенного поля. Функции $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, ответственные за возмущение поля при $t > 0$, считаются известными. При $t \leqslant 0$ следует положить

$$\rho(\boldsymbol{r},\ 0) = 0, \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ 0) = 0.$$

Соответственно в начальный момент времени $t = 0$ равны нулю векторы электрического и магнитного полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ 0) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, 0) = 0$. Тогда начальные условия для потенциалов гласят:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)\big|_{t=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0, \\ \varphi(\boldsymbol{r},\ t)\big|_{t=0} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23,4}$$

Действительно, если условия (23,4) удовлетворены, то из определений векторов поля непосредственно видно, что векторы поля обращаются в нуль. Таким образом, начальное условие (23,4) полностью эквивалентно требованию: плотности заряда и тока равны нулю при $t = 0$ и, вообще говоря, отличны от нуля при $t > 0$.

Граничными условиями будут служить требования, чтобы вдали от объема V' потенциалы поля убывали не медленнее, чем по закону:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty; \\ |\boldsymbol{A}| &\sim O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty, \end{aligned} \tag{23,5}$$

т. е. не медленнее, чем функция $\frac{1}{r}$.

Для решения системы уравнений поля в этом параграфе мы воспользуемся простым, но не строгим методом, основанным на использовании принципа суперпозиции. В следующем параграфе будет приведен более последовательный, с математической точки зрения, метод решения, который приводит к тем же результатам.

Разобьем всю систему на совокупность как угодно малых зарядов $\delta e_i = \rho(\boldsymbol{r}, t)\,\delta V_i$, где δV_i — как угодно малый объем в области V'. Будем искать в некоторой точке наблюдения N потенциал поля, создаваемого зарядом δe_i, предполагая при этом, что никаких других зарядов в пространстве нет. Полное поле, на основании принципа суперпозиции, представляет сумму полей, создаваемых всеми зарядами δe_i, входящими в систему.

Подчеркнем, что закон сохранения заряда не допускает существования уединенного и переменного во времени заряда δe_i. В действительности изменение (например, возрастание) заряда δe_i во времени предполагает одновременное уменьшение заряда δe_k в другом элементе объема так, чтобы полный заряд системы сохранялся. Однако для нахождения потенциалов поля, создаваемого зарядом δe_i, мы не будем формально учитывать существование остальных зарядов. Возникающее при этом кажущееся нарушение закона сохранения заряда не отразится на конечном решении, в котором будет проведено суммирование по всем зарядам системы.

Найдем, прежде всего, решение системы уравнений для потенциалов поля, создаваемого во всем пространстве вне малого объема δV_i зарядом δe_i.

Во всех точках пространства вне объема δV_i плотность заряда, согласно нашему предположению, равна нулю. Поэтому вне объема δV_i уравнения для потенциалов электромагнитного поля приобретают вид

$$\begin{gathered} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \end{gathered} \tag{23,6}$$

Введем сферические координаты с началом координат, помещенным в объеме δV_i. Поле вне объема δV_i обладает сферической симметрией, так что потенциалы поля могут зависеть только от расстояния до объема δV_i — радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и времени. Воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{23,7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{23,8}$$

Мы видим, что скалярный потенциал и все компоненты вектора-потенциала определяются уравнением одного типа:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{23,9}$$

По причинам, которые будут ясны из дальнейшего, уравнение типа (23,9) носит название волнового уравнения. Интегрирование волнового уравнения может быть проще всего проведено по методу Даламбера. Метод Даламбера заключается, грубо говоря, в сведении уравнения в частных производных типа (23,9) к уравнению со смешанной второй производной (за более строгим изложением метода Даламбера отсылаем читателя к математическим руководствам[1])).

Перепишем уравнение (23,9) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rf)=0 \tag{23,10}$$

и введем новую неизвестную функцию,

$$\psi=rf, \tag{23,11}$$

что всегда возможно, поскольку $r\neq 0$, вне объема δV_t. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{23,12}$$

Перейдем теперь в уравнении (23,12) к новым переменным:

$$\xi=t-\frac{r}{c}, \tag{23,13}$$

$$\eta=t+\frac{r}{c}. \tag{23,14}$$

Отсюда

$$t=\frac{\xi+\eta}{2},\qquad r=\frac{\eta-\xi}{2}c,$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{c}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\eta}=\frac{c}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\frac{4}{c^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}=-\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

В новых переменных уравнение (23,12) имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}=0. \tag{23,15}$$

Это уравнение, содержащее лишь смешанную производную, интегрируется непосредственно. Очевидно, что оно удовлетворяется любыми функциями $\psi_1(\eta)$ и $\psi_2(\xi)$ одной переменной, ξ или η. Поэтому общее решение уравнения (23,15) можно написать в виде

$$\psi(\xi,\ \eta)=\psi_1(\xi)+\psi_2(\eta), \tag{23,16}$$

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1967, гл. II.

где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции одной переменной — ξ и η соответственно. Возвращаясь к старым переменным r и t, получаем

$$\psi(r,\ t)=\psi_1\left(t-\frac{r}{c}\right)+\psi_2\left(t+\frac{r}{c}\right). \tag{23,17}$$

Найденное решение имеет простой смысл. Значение функции ψ_1 в точке $r+c$ и в момент времени $(t+1)$ совпадает со значением этой функции в точке r в момент времени t. Это означает, что $\psi_1\left(t-\frac{r}{c}\right)$ описывает процесс периодический в пространстве и во времени, т. е. волновой процесс. Волновой процесс распространяется в сторону возрастающих значений расстояния r от начала координат со скоростью, равной c. Аналогично $\psi_2\left(t+\frac{r}{c}\right)$ описывает волну, распространяющуюся от больших r к меньшим в направлении к началу координат. Для функции f имеем

$$f=\frac{\psi_1\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}+\frac{\psi_2\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{23,18}$$

Формула (23,18), дающая общее решение уравнения (23,9), представляет наложение двух волн — расходящихся из начала координат (первое слагаемое) и сходящейся к началу координат (второе слагаемое). Поверхности сфер $r=\text{const}$ являются поверхностями постоянного значения функции f или поверхностями равной фазы. Поскольку поверхностями равной фазы являются сферические поверхности, говорят, что волновой процесс, описываемый функцией f, является совокупностью расходящейся и сходящейся сферических волн. Скалярный потенциал φ и все компоненты вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$ могут быть представлены в виде формулы (23,18).

Для выяснения смысла полученных решений рассмотрим одно из частных решений, например расходящуюся сферическую волну. Для конкретности напишем выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi(r,\ t)=\frac{\varphi_1\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{23,19}$$

При произвольном виде функции φ_1 формула (23,19) дает частное решение уравнения (23,1) в области пространства вне объема δV_i. Потребуем теперь, чтобы (23,19) непрерывно переходило в решение уравнения (23,1) вблизи объема δV_i, т. е. вблизи места расположения заряда $\delta e_i(t)$. Если в уравнении (23,1) совершить формальный переход (смысл такого перехода станет ясным из дальнейшего), положив $c\to\infty$, то оно превратится, очевидно, в уравнение для электростатического потенциала, решением которого служит

$$d\varphi_i=\frac{\delta e_i(t)}{r}=\frac{\rho(r,t)\,\delta V_i}{r}. \tag{23,20}$$

Записав (23,19) в виде

$$d\varphi_i(r,t)=\frac{\rho\left(t-\frac{r}{c}\right)\delta V_i}{r}, \tag{23,21}$$

мы приходим к потенциалу поля,создаваемого зарядом δe_i, который удовлетворяет уравнению (23,7) вне объема δV_i и переходит вблизи начала координат в (23.20).

Формула (23,21) показывает, что потенциал поля в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от начала координат в момент времени t, определяется значением заряда в предыдущий момент времени $\tau=t-\frac{r}{c}$. Потенциал (23,21) называется поэтому запаздывающим потенциалом, а величина $\frac{r}{c}$ — временем запаздывания. Время запаздывания представляет промежуток времени, в течение которого электромагнитное поле, распространяющееся со скоростью c, проходит путь r.

Вводя начало координат в некоторой точке O, расположенной в объеме V', и интегрируя выражение (23,21) по всем зарядам системы, приходим к следующему выражению для потенциала поля, создаваемого в точке наблюдения N:

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',\,t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{c}\right)dV'}{R}=\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',\tau)\,dV'}{R}, \tag{23,22}$$

где $\tau=t-\frac{R}{c}$, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$.

Согласно (23,22) для получения потенциала в точке наблюдения N, как и в электростатике, нужно взять интеграл от величины $\frac{\rho}{R}$ по всему объему системы. При этом, однако, значение плотности заряда берется в момент времени $\tau=t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$, где время запаздывания $\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ определяется расстоянием от каждой точки $\boldsymbol{r}'$ до точки наблюдения.

Совершенно аналогично для вектора-потенциала можно написать частное решение уравнения (23,2) в виде

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=$$

$$=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{R}{c}\right)dV'}{R}=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau)\,dV'}{R}. \qquad (23,23)$$

Наряду с решениями уравнений для потенциалов в виде запаздывающих потенциалов можно написать и другие частные решения, отвечающие функции ψ_2 в общем решении (23,18):

$$\varphi^*(\boldsymbol{r}, t)=\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t+\frac{R}{c}\right)dV'}{R}, \qquad (23,24)$$

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r}, t)=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', t+\frac{R}{c}\right)dV'}{R}. \qquad (23,25)$$

В формулах (23,24) и (23,25) значения функций ρ и $\boldsymbol{j}$, определяющие потенциалы в точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t, берутся в момент времени $\tau^*=t+\frac{R}{c}$. Это означает, что потенциалы в момент времени t зависят от той плотности заряда, которая будет в точке $\boldsymbol{r}$ через промежуток времени $\frac{R}{c}$. Потенциалы (23,24) и (23,25) называются опережающими.

Из запаздывающих и опережающих потенциалов можно составить произвольные линейные комбинации вида $\alpha_1\varphi+\alpha_2\varphi^*$, $\beta_1\boldsymbol{A}+\beta_2\boldsymbol{A}^*$, которые также удовлетворяют уравнениям поля. Общее решение уравнений для потенциалов получается из найденных частных решений и общих решений уравнений (23,7) и (23,8).

Появление запаздывающих и опережающих потенциалов как равноправных решений уравнений поля вполне естественно. Как и уравнения механики, уравнения электродинамики симметричны относительно будущего и прошедшего. Они не меняются при замене t на $(-t)$ и должны поэтому иметь общее решение, инвариантное (неизменное) относительно изменения знака времени.

Выбор коэффициентов в этих линейных комбинациях определяется заданием указанных выше дополнительных условий, характеризующих поведение потенциалов на бесконечности. Для выполнения этих условий необходимо отбросить решение, отвечающее опережающему потенциалу. Действительно, рассмотрим в момент времени $t=0$ некоторую сферу радиуса R_1 вне объема V'. Согласно граничному условию (23,5), потенциал

$\varphi(R_1,\ 0) \approx O\left(\frac{1}{R_1}\right)$. Соответственно этому запаздывающий потенциал

$$\varphi(R_1,\ 0) = \int \frac{\rho\left(r',\ -\frac{R_1}{c}\right)}{R}\,dV' = 0,$$

поскольку по условию плотность заряда равна нулю при $t < 0$. Наоборот, опережающий потенциал

$$\varphi^*(R_1,\ 0) = \int \frac{\rho\left(r',\ \frac{R_1}{c}\right)}{R}\,dV' \neq O\left(\frac{1}{R_1}\right).$$

В последней формуле значению $t = 0$ отвечают отличные от нуля значения аргумента функции $\rho(\boldsymbol{r}', \tau)$, так как плотность заряда $\rho\left(\boldsymbol{r}',\ \frac{R_1}{c}\right)$ не равна нулю.

Напомним, что использованные нами свойства плотности заряда $\rho(\boldsymbol{r}',\ 0) = 0$, $\rho\left(\boldsymbol{r}',\ t - \frac{R}{c}\right) \neq 0$ отвечают выбору начальных условий в форме (23,4). Мы видим, что при таких свойствах плотности ρ опережающий потенциал не удовлетворяет условию (23,5), определяющему его поведение на бесконечности. Именно, опережающий потенциал убывает медленнее, чем функция $\frac{1}{r}$. Для получения такого решения волнового уравнения, которое удовлетворяло бы системе начальных и граничных условий, следует положить $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ и оставить лишь решение уравнений поля в виде запаздывающих потенциалов. Несложные, но несколько громоздкие выкладки позволяют убедиться в том, что запаздывающие потенциалы, даваемые формулами (23,24) и (23,25), удовлетворяют условию Лоренца (23,3) при $\alpha_1 = \beta_1 = 1$.

Итак, мы приходим к весьма важному выводу: система зарядов, начавших в момент времени $t = 0$ двигаться нестационарным образом, создает в окружающем пространстве электромагнитное поле, потенциалы которого имеют характер запаздывающих потенциалов. Потенциалы поля имеют характер сферических волн, исходящих от системы и распространяющихся в пустоте со скоростью c.

Мы будем говорить, что система нестационарно движущихся зарядов излучает электромагнитные волны, и кратко называть ее излучателем.

Решение уравнений электромагнитного поля в виде запаздывающих потенциалов имеет большое принципиальное значение.

Оно отвечает определенной системе представлений о характере причинной связи, которая отличается от представлений классической механики.

Как известно, все положения классической механики согласуются с ньютоновским представлением о действии на расстоянии. В классической механике предполагается, что ускорение некоторой материальной точки в данный момент времени полностью определяется силой, действующей на нее в тот же момент времени. Сила, действующая на данную материальную точку, в свою очередь зависит от положения других материальных точек, находящихся на конечном расстоянии от рассматриваемой. Если положение какой-либо из материальных точек изменится в некоторый момент времени t_0, в тот же момент времени изменится и величина силы. Иными словами, скорость распространения взаимодействия в пространстве считается в классической механике бесконечно большой.

В теории электромагнитого поля ситуация коренным образом изменяется. Если изменить положение зарядов, находящихся на расстоянии r от точки наблюдения, то потенциал в последней изменится лишь через время $\tau = \frac{r}{c}$. Это время требуется для того, чтобы возмущение электромагнитного поля, движущееся от точки к точке с конечной скоростью, равной скорости света c, прошло в пространстве путь r. При этом возмущение передается от одной точки поля к другой, с ней соседней.

Пространство, в котором происходит распространение электромагнитных возмущений, уже не есть пустое «ничто» классической механики, но считается заполненным реальным электромагнитным полем, наделенным определенными физическими свойствами. Таким образом, бесконечно большая скорость распространения взаимодействия и дальнодействие в классической механике заменяется конечной скоростью распространения взаимодействия и представлением о близкодействии в теории электромагнитного поля. Причина (изменение поля) и следствие (движение пробного заряда в точке наблюдения) относятся к одному месту и одному моменту времени. В следующей части книги точка зрения теории поля получит дальнейшее подтверждение и расширение.

Следует еще заметить, что, поскольку скорость распространения электромагнитных возмущений c весьма велика, очень часто на практике можно считать ее бесконечно большой. Представления классической механики тем самым не просто отвергаются как неверные, но сохраняются, как приближенные, имеющие определенную область применимости.