§ 24*. Общее решение уравнения Даламбера в виде запаздывающих потенциалов

Перейдем теперь к строгому решению уравнения Даламбера для потенциалов. Мы ограничимся нахождением одного из потенциалов, например, векторного потенциала. Выражение для скалярного потенциала может быть написано по аналогии.

В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе уравнение для потенциала

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{24,1}$$

должно быть дополнено начальными и граничными условиями.

Мы рассмотрим задачу в следующей постановке: пусть ранее некоторого момента времени $t = 0$ (т. е. при $t < 0$) имелась система зарядов, например, неподвижных или совершавших стационарное движение. К моменту $t = 0$ их конфигурация задана и поле имеет некоторое распределение в пространстве. В момент времени $t = 0$ состояние системы изменяется и заряды начинают совершать нестационарное движение. Нас будет интересовать закон изменения векторов поля, связанный с этим нестационарным движением зарядов, начиная с момента $t = 0$.

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — векторы поля, связанные с движением зарядов за время $t \geqslant 0$. Иными словами, пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — изменения электромагнитного поля, которое существовало в момент $t = 0$, вызванные движением зарядов при $t \geqslant 0$. Тогда из определения $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ следует, что они должны удовлетворять начальному условию:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} = 0 \text{ при } t = 0 \text{ (во всем пространстве).}$$

Начальное условие для вектора-потенциала имеет при этом следующий вид:

$$\boldsymbol{A} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad r \text{ — любом,} \tag{24,2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad r \text{ — любом.} \tag{24,3}$$

Первое из написанных равенств отвечает равенству $\boldsymbol{H} = 0$, второе — отсутствию электрического поля $\boldsymbol{E} = 0$ в начальный момент времени. Граничное условие на бесконечности имеет вид

$$\boldsymbol{A} \to O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad t \geqslant 0. \tag{24,4}$$

Иными словами, под $\boldsymbol{A}$ мы понимаем вектор-потенциал поля, связанного с движением зарядов, начавшимся в момент $t = 0$ и продолжающимся при $t > 0$.

Для получения решения поставленной задачи — нахождения решения уравнения (24,1), удовлетворяющего системе условий

(24,2)—(24,4) (именуемой в математической физике задачей Коши), — удобнее всего воспользоваться методом интеграла Фурье¹). Представим векторный потенциал и плотность тока в виде трехкратного интеграла Фурье:

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k},\ t)\,e^{-i\boldsymbol{kr}}\,d\boldsymbol{k}, \tag{24,5}$$

$$\boldsymbol{j}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \boldsymbol{p}(\boldsymbol{k},\ t)\,e^{-i\boldsymbol{kr}}\,d\boldsymbol{k}. \tag{24,6}$$

При этом фурье-изображения вектора-потенциала и плотности тока даются формулами обращения:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k},\ t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)\,e^{i\boldsymbol{kr}}\,d\boldsymbol{r}, \tag{24,7}$$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k},\ t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ t)\,e^{i\boldsymbol{kr}}\,d\boldsymbol{r}. \tag{24,8}$$

Подставляя (24,5) и (24,6) в (24,1), находим

$$\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}+k^2c^2\boldsymbol{a}=4\pi c\boldsymbol{p}. \tag{24,9}$$

Уравнение (24,9) представляет уравнение в полных производных, и его общее решение может быть получено без труда. Подстановка (24,7) в начальные условия (24,2) и (24,3) дает

$$\boldsymbol{a}=0 \quad \text{при} \quad t=0, \tag{24,10}$$

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0 \quad \text{при} \quad t=0. \tag{24,11}$$

Решение уравнения (24,9) с начальными условиями (24,10) и (24,11) гласит²):

$$\boldsymbol{a}=\frac{4\pi}{k}\int_0^t \boldsymbol{p}(\xi)\sin\{kc(t-\xi)\}\,d\xi. \tag{24,12}$$

Для получения функции $\boldsymbol{A}$ это значение $\boldsymbol{a}$ должно быть подставлено в (24,5). Тогда имеем

$$\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}}\int\int_0^t \boldsymbol{p}(\xi)\sin\{kc(t-\xi)\}\,e^{-i\boldsymbol{kr}}\,d\xi\,\frac{d\boldsymbol{k}}{k}. \tag{24,13}$$

---

¹) Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1945, стр 183, А. А. Власов, Макроскопическая электродинамика, Гостехиздат, 1955, стр 166

²) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Гостехиздат, т. II, 1951, стр 95.

7*

Вместо фурье-изображения ρ в (24.13) следует ввести плотность тока $\boldsymbol{j}$. С помощью (24,8) находим

$$\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int e^{-i\boldsymbol{kr}}\frac{d\boldsymbol{k}}{k}\int_0^t\int e^{i\boldsymbol{kr}'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\cdot\sin\{kc(t-\xi)\}\,d\boldsymbol{r}'\,d\xi. \quad (24,14)$$

В формуле (24,14) должно быть проведено интегрирование по переменным ξ и $\boldsymbol{k}$.

Изменим порядок интегрирования, написав

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2\pi^2}\int d\boldsymbol{r}'\int_0^t\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,d\xi\int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}\,d\boldsymbol{k}}{k}. \quad (24,15)$$

Вычислим внутренний интеграл. Имеем

$$\int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\,d\boldsymbol{k}=$$
$$=\int e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\cdot k^2\,dk\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=$$
$$=2\pi\int_0^\infty\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}k^2\,dk\cdot\int_0^\pi e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta.$$

Но

$$\int_0^\pi e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta=\int_{-1}^{+1}e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|u}\,du=2\frac{\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}}{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

Поэтому

$$\int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\,d\boldsymbol{k}=$$
$$=\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\int_0^\infty\sin\{kc(t-\xi)\}\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}\,dk=\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot I,$$

где через I обозначен интеграл:

$$I=\int_0^\infty\sin\{kc(t-\xi)\}\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}\,dk=$$
$$=\int_0^\infty\sin\alpha k\sin\beta k\,dk=\frac{1}{2}\int_0^\infty\cos(\alpha-\beta)k\,dk-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\cos(\alpha+\beta)k\,dk=\frac{\pi}{2}\delta(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}\delta(\alpha+\beta)=$$
$$=\frac{\pi}{2}\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]-\frac{\pi}{2}\delta[c(t-\xi)+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|].$$

При вычислении I мы воспользовались одним из определений дельта-функции, данных в приложении III.

Находим окончательно

$$\int e^{-ik(r-r')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\,d\boldsymbol{k} =$$
$$= \frac{2\pi^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\{\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]-\delta[c(t-\xi)+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\}.$$

Подставляя это выражение в (24,15), получаем]

$$\boldsymbol{A} = \int\frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^t \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\,d\xi +$$
$$+\int\frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^t \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,\delta[c(t-\xi)+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\,d\xi.$$

Найдем интеграл по переменной ξ, воспользовавшись свойствами δ-функции.

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_0^t \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\,d\xi =$$
$$= -\frac{1}{c}\int_{ct-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',\ -\frac{u}{c}+t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\delta(u)\,du =$$
$$= -\frac{1}{c}\int_{\infty}^{-\infty} \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',\ -\frac{u}{c}+t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\delta(u)\,du = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',\ t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right).$$

При этом за новую переменную мы выбрали $u = c(t-\xi) - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.

Если имеет место неравенство $t > \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$, можно расширить пределы интегрирования, как это и было сделано. Если же $t < \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$, то интегрирование велось бы только по отрицательным значениям переменной u (оба предела отрицательны).

Точка $u = 0$ в которой $\delta(u)$ обращается в бесконечность, лежала бы вне области интегрирования, и в силу (III, 3′) интеграл обратился бы в нуль. Это относится, в частности, к моменту времени $t = 0$, что отвечает выполнению начального условия (24,2). Аналогично второй интеграл дает

$$\int_0^t j(r', \xi)\,\delta[c(t-\xi)+|r-r'|]\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{c}\int_{ct+|r-r'|}^{|r-r'|} j\left(r', -\frac{u}{c}+t+\frac{|r-r'|}{c}\right)\delta(u)\,du = 0.$$

Действительно, в этом случае точка $u=0$ оказывается вне области интегрирования

Итак, мы получили

$$A(r, t) = \frac{1}{c}\int \frac{j\left(r', t-\frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}\,dr', \qquad (24,16)$$

т е известное уже выражение для запаздывающего потенциала

Опережающему потенциалу отвечало выражение со второй дельта-функцией Опережающий потенциал не дал никакого вклада в вектор-потенциал только потому, что при получении решения (24,12) уравнения (24,9) мы воспользовались начальными условиями (24,10) и (24,11), что и определило вид $a(k, t)$.

Если бы мы написали общее решение уравнения (24,9), не задаваясь начальными условиями, в окончательное выражение для потенциала вошла бы линейная комбинация запаздывающего и опережающего потенциалов, а также общее решение однородного уравнения

Для дальнейшего нам понадобится выражение для потенциала в специальном случае, когда зависимость $j(r, t)$ от времени выражается простым гармоническим законом·

$$j(r, t) = j_0(r)\,e^{i\omega t}. \qquad (24,17)$$

Подстановка в (24,16) дает

$$A(r, t) = \frac{1}{c}e^{i\omega t}\int \frac{j_0(r')\,e^{-i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r-r'|}\,dr' = A_0(r)\,e^{i\omega t}. \qquad (24,18)$$

Как и следовало ожидать, вектор-потенциал зависит от времени по тому же закону, что и ток Амплитуда $A_0(r)$ равна, очевидно,

$$A_0(r) = \frac{1}{c}\int \frac{j_0(r')\,e^{-i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r-r'|}\,dr'. \qquad (24,19)$$

С другой стороны, подставляя (24,17) и (24,18) в (24,1), имеем

$$\Delta A_0 + \frac{\omega^2}{c^2}A_0 = -\frac{4\pi}{c}j_0. \qquad (24,20)$$

Таким образом, формула (24,19) дает решение уравнения (24,20), которое встретится нам в дальнейшем

Заметим в заключение, что решение уравнения Пуассона является частным случаем последней задачи Полагая в (24,20) и (24,19) $\omega = 0$, приходим к соотношениям·

$$\Delta A_0 = -\frac{4\pi}{c} j_0, \tag{24,21}$$

$$A_0 = \frac{1}{c} \int \frac{j_0(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{24,22}$$

Выражение (24,22) может быть получено и прямым решением (24,21) с помощью разложения в интеграл Фурье Действительно, полагая

$$A_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} a_0(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}, \tag{24,23}$$

$$j_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} p_0(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} \tag{24,24}$$

и подставляя (24,23) и (24,24) в (24,21), имеем

$$a_0 = \frac{4\pi p_0}{ck^2}. \tag{24,25}$$

Следовательно,

$$A_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \left(\frac{4\pi p_0}{ck^2}\right) d\boldsymbol{k}. \tag{24,26}$$

По формуле обращения из (24,24) получаем

$$p_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} j_0(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r},$$

и подстановка этого выражения в (24,26) приводит к формуле

$$A_0 = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{c} \int j_0(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}' \int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \frac{d\boldsymbol{k}}{k^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{c} \int j_0(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}' \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dk =$$

$$= \frac{2}{\pi c} \int j_0(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}' \int_0^\infty \frac{\sin(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dk = \frac{1}{c} \int \frac{j_0(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

При этом мы воспользовались равенством

$$\int_0^\infty \frac{\sin(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dk = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$