§ 25*. Поле произвольного движущегося точечного заряда

Важным примером применения формулы запаздывающих потенциалов является случай одиночного точечного заряда, совершающего произвольное движение. Если скорость заряда равна $v_0(t)$, то его координата $\boldsymbol{r}_0 = \int \boldsymbol{v}_0\, dt$. Плотность заряда и плотность тока можно написать в виде

$$\rho = e\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0), \qquad \boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}_0 = e\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{v}_0(t).$$

Тогда получаются следующие выражения для запаздывающих потенциалов:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(\tau))\,\boldsymbol{v}_0(\tau)\,dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} =$$

$$= \frac{e}{c}\int \frac{\delta\left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0\left(t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)\right)\boldsymbol{v}_0\left(t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \qquad (25,1)$$

$$\varphi(\boldsymbol{r},\ t) = e\int \frac{\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(\tau))\,dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = e\int \frac{\delta\left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0\left(t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)\right)dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \qquad (25,2)$$

Поскольку $\boldsymbol{r}_0$ является функцией времени запаздывания $t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$, в формулах (25,1) и (25,2) в подынтегральной функции нельзя непосредственно воспользоваться свойством дельта-функции и положить $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_0$. Для выполнения интегрирования введем новые переменные:

$$l_x = x' - x_0(\tau), \quad l_y = y' - y_0(\tau), \quad l_z = z' - z_0(\tau)$$

Вычисление якобиана для перехода к новым переменным в общем случае довольно громоздких выкладок. Мы для простоты положим, что заряд движется вдоль оси x_0, так что $v_x = v_0$. Тогда имеем

$$\frac{\partial l_x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x'} =$$

$$= 1 - v_0 \frac{\partial}{\partial x'}\left\{t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right\} = 1 - \frac{v_0}{c}\frac{x - x'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|};$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial l_x}{\partial z'} = 0;$$

$$\frac{\partial l_y}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial l_y}{\partial y'} = 1; \quad \frac{\partial l_z}{\partial z'} = 0;$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial l_z}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial l_z}{\partial z'} = 1.$$

Якобиан равен, таким образом,

$$\frac{\partial(l_x, l_y, l_z)}{\partial(x', y', z')} = 1 - \frac{v_0(x - x')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

Аналогичное вычисление при произвольной ориентации скорости приводит к выражению:

$$\frac{\partial(l_x, l_y, l_z)}{\partial(x', y', z')} = 1 - \frac{\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

Поэтому можно написать

$$dx'\,dy'\,dz' = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(l_x, l_y, l_z)}\,dl_x\,dl_y\,dl_z = \frac{dl_x\,dl_y\,dl_z}{1 - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}} = \frac{d\boldsymbol{l}}{1 - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}.$$

Преобразуя выражения (25,1) и (25,2) к новым переменным, получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\boldsymbol{l})\,\boldsymbol{v}_0\left\{t - \dfrac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0|}{c}\right\}d\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0| - \dfrac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0)}{c}\,\boldsymbol{v}\left\{t - \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0}{c}\right\}} =$$

$$= \frac{e\boldsymbol{v}_0}{c\left[|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{c}\right]} = \frac{e\boldsymbol{v}_0(\tau)}{c\left[R(\tau) - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\tau)\,\boldsymbol{R}(\tau)}{c}\right]}, \qquad (25,3)$$

где через $\boldsymbol{R}(\tau)$ обозначен радиус-вектор, проведенный от точки мгновенного положения заряда до точки наблюдения, т. е. $\boldsymbol{R}(\tau) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$. Значение мгновенного положения заряда должно быть взято в момент времени τ:

$$\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}{c}.$$

Значение мгновенной скорости $v_0(\tau)$ также берется в момент времени τ.

Аналогично

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = e\int \frac{\delta(\boldsymbol{l})\,d\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{l}| - \dfrac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0)}{c}\,\boldsymbol{v}_0\left\{t - \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0}{c}\right\}} =$$

$$= \frac{e}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\tau)}{c}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)} = \frac{e}{R(\tau) - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\tau)\,\boldsymbol{R}(\tau)}{c}}. \qquad (25,4)$$

Между φ и $\boldsymbol{A}$ имеется соотношение

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{v}_0\varphi}{c}. \qquad (25,5)$$

Потенциалы поля произвольно движущегося точечного заряда (25,3) и (25,4) носят название потенциалов Лиенара — Вихерта. Если ввести сокращенное обозначение

$$\lambda(\tau) = R(\tau) - \frac{\boldsymbol{v}_0(\tau)\,\boldsymbol{R}(\tau)}{c}, \tag{25,6}$$

то потенциалы Лиенара — Вихерта приобретут вид

$$\boldsymbol{A} = \frac{e\boldsymbol{v}_0}{c\lambda}, \tag{25,7}$$

$$\varphi = \frac{e}{\lambda}. \tag{25,8}$$

Важно отметить, что потенциалы Лиенара—Вихерта характеризуют поле точечного заряда в самом общем виде — при произвольных значении скорости и характере движения.

Нетрудно заметить, что при скорости заряда v_0, весьма малой по сравнению со скоростью света, т. е. при $\frac{|v_0|}{c} \to 0$, выражение для скалярного потенциала φ переходит в формулу (20,2), а вектор-потенциал A оказывается малым. Однако при выводе потенциалов Лиенара — Вихерта мы не накладывали никаких ограничений на величину скорости. Именно поэтому потенциалы Лиенара — Вихерта характеризуют поле точечного заряда в самом общем случае — при произвольном характере и скорости движения.

Мы проведем более подробное обсуждение поля заряда, совершающего произвольное движение в § 20 ч. II, поскольку ряд выводов из формул (25,7)—(25,8) может стать ясным в свете теории относительности.

Найдем поле движущегося заряда. В формулах

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$$

и

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$$

производные берутся по координатам точки наблюдения $\boldsymbol{r}$ и времени наблюдения t. Между тем, потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ зависят от $\boldsymbol{r}$ и t сложным образом.

Именно, согласно (25,7) и (25,8) они являются функциями величины τ, которая в свою очередь зависит от $\boldsymbol{r}$ и t. Поэтому нужно написать

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Для нахождения $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ воспользуемся определением $\tau = t - \frac{R(\tau)}{c}$. Дифференцирование даст

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau}}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$R\frac{\partial R}{\partial \tau} = \mathbf{R}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\frac{\partial (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\partial \tau} = -\mathbf{R}\mathbf{v}_0,$$

получаем

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = -\frac{\mathbf{v}_0 \mathbf{R}}{R}. \qquad (25,9)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}_0 \mathbf{R}}{cR}} = \frac{R}{\lambda} \qquad (25,10)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{R}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Из определения $\mathbf{E}$ и формул (25,7) и (25,8) находим

$$\mathbf{E} = -e\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{v}_0}{\lambda} = \frac{e}{\lambda^2}\mathrm{grad}\,\lambda - \frac{e}{c^2\lambda}\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \frac{e\mathbf{v}_0}{c^2\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial t}. \qquad (25,11)$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0(\tau)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{R}{\lambda}\dot{\mathbf{v}}_0, \qquad (25,12)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{R}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(R - \frac{\mathbf{v}_0 \mathbf{R}}{c}\right) = \frac{R}{\lambda}\left\{\frac{\partial R}{\partial \tau} - \frac{\dot{\mathbf{v}}_0 \mathbf{R}}{c} - \frac{\mathbf{v}_0}{c}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau}\right\} =$$

$$= -\frac{R}{\lambda}\left(\frac{\mathbf{v}_0 \mathbf{R}}{R} + \frac{\dot{\mathbf{v}}_0 \mathbf{R}}{c} - \frac{v_0^2}{c}\right). \qquad (25,13)$$

Вычислим теперь $\mathrm{grad}\,\lambda$. Поскольку $\lambda = \lambda(\mathbf{R}, \tau)$, находим

$$\mathrm{grad}\,\lambda = (\mathrm{grad}\,\lambda)_\tau + \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\mathrm{grad}\,\tau,$$

$$(\mathrm{grad}\,\lambda)_\tau = \mathrm{grad}_{\mathbf{R}}\left(R - \frac{\mathbf{v}_0 \mathbf{R}}{c}\right) = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}_0}{c},$$

так как при дифференцировании по R при постоянном τ вектор $\boldsymbol{v}_0$ остается постоянным. Таким образом,

$$\operatorname{grad}\lambda=\frac{\boldsymbol{R}}{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}+\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\operatorname{grad}\tau=\frac{\boldsymbol{R}}{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}-\left(\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{R}+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}_0\boldsymbol{R}}{c}-\frac{v_0^2}{c}\right)\operatorname{grad}\tau$$

в силу (25,13) и (25,10).

Для $\operatorname{grad}\tau$ имеем

$$\operatorname{grad}\tau=\operatorname{grad}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-\frac{\operatorname{grad}R}{c}=-\frac{1}{c}\left((\operatorname{grad}R)_\tau+\frac{\partial R}{\partial\tau}\operatorname{grad}\tau\right),$$

откуда, на основании (25,9),

$$\operatorname{grad}\tau=-\frac{1}{c}\frac{(\operatorname{grad}R)_\tau}{1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\tau}}=-\frac{\boldsymbol{R}}{cR}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\tau}}=-\frac{\boldsymbol{R}}{c\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)}=-\frac{\boldsymbol{R}}{c\lambda}.$$

Окончательно,

$$\operatorname{grad}\lambda=\frac{\boldsymbol{R}}{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}+\left(\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{R}+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}_0\boldsymbol{R}}{c}-\frac{v_0^2}{c}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{c\lambda}. \qquad (25,14)$$

Подставляя в (25,11) значения производных из (25,12), (25,13) и (25.14), приходим к выражению для $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E}=e\frac{\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}\left(\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}R\right)+\frac{e}{c^2\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}\left[\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}R,\ \dot{\boldsymbol{v}}_0\right]\right]=$$
$$=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2, \qquad (25,15)$$

где

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{e\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0R}{c}\right)}{\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}, \qquad (25,16)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{e}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}\left[\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0R}{c},\ \dot{\boldsymbol{v}}_0\right]\right]. \qquad (25,17)$$

Аналогично магнитное поле

$$\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{rot}\frac{e\boldsymbol{v}_0}{c\lambda}=\frac{e}{\lambda c}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0+\frac{e}{c}\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\lambda},\ \boldsymbol{v}_0\right]=$$
$$=\frac{e\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0}{\lambda c}-\frac{e}{c\lambda^2}[\operatorname{grad}\lambda,\ \boldsymbol{v}_0].$$

Но

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0(\tau)=-[\dot{\boldsymbol{v}}_0,\ \operatorname{grad}\tau]=-\frac{[\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{v}}_0]}{c\lambda},$$

откуда

$$\boldsymbol{H} = -e\,\frac{[\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{v}}_0]}{c^2\lambda^2} + \frac{e}{c\lambda^2}\,[\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}\lambda]. \tag{25,18}$$

Сравнивая формулы (25,18) с (25,15) и учитывая (25,14), находим

$$\boldsymbol{H} = \frac{[\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}]}{R}. \tag{25,19}$$

В формулах (25,15) и (25,18) величины $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{R}$ следует брать в момент времени τ.

При этом $\boldsymbol{R}(\tau)$ — расстояние между положением заряда и точкой наблюдения в момент времени τ, $\boldsymbol{R}(t)$ — расстояние от положения заряда до точки наблюдения в момент времени t. За время $t-\tau$ возмущение электромагнитного поля проходит расстояние $R(\tau)$. Если заряд движется равномерно, то путь заряда за то же время равен $\boldsymbol{v}(t-\tau)$.

Электрическое поле $\boldsymbol{E}$, создаваемое зарядом, естественно распадается на две части. Первая, $\boldsymbol{E}_1$, зависит от скорости заряда $\boldsymbol{v}_0$, вторая, $\boldsymbol{E}_2$, — от его ускорения $\dot{\boldsymbol{v}}_0$. В случае равномерного движения вторая часть поля отсутствует.

Величина $|\boldsymbol{E}_1|$ на больших расстояниях от заряда убывает с расстоянием по закону

$$|\boldsymbol{E}_1| \sim \frac{1}{R^2}.$$

Из (25.16) следует, что $\boldsymbol{E}_1$ всегда имеет компоненту, направленную по вектору $\boldsymbol{R}$. Наконец, при $v_0 \ll c$, как легко видеть,

$$\boldsymbol{E}_1 \approx \frac{e\boldsymbol{R}}{R^3},$$

т. е. переходит в выражение (20,4) для поля медленно движущегося заряда.

Второе слагаемое в поле, как видно из (25,17), всегда перпендикулярно к радиусу-вектору $\boldsymbol{R}(\tau)$, т. е. имеет характер поперечного поля. Оно перпендикулярно также и к ускорению $\dot{\boldsymbol{v}}_0$. Вторая часть поля на больших расстояниях от заряда убывает по закону

$$|\boldsymbol{E}_2| \sim \frac{1}{R}.$$

Таким образом, на больших расстояниях $\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{E}_2$.

При $v_0 \ll c$ из (25,17) находим

$$\boldsymbol{E}_2 \approx \frac{e}{c^2R^3}\,[\boldsymbol{R}\,[\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{v}}_0]\,].$$

Смысл этого слагаемого будет ясен из дальнейшего (см. § 26—27).

Магнитное поле движущегося заряда, согласно (25,19), всегда перпендикулярно к электрическому полю и радиусу-вектору $\boldsymbol{R}$. По абсолютной величине напряженности электрического и магнитного полей на больших расстояниях от заряда равны между собой.

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{H}|.$$

При выводе (25,15)—(25,18) мы не делали никаких допущений о малости v по сравнению с c. Тем не менее, формулы теряют всякий смысл, если попытаться положить в них $v_0 > c$: при этом изменился бы знак у поля, т. е. оказалось бы, что положительный заряд создает такое поле, какое должен создавать отрицательный заряд. Это означает, что при $v_0 > c$ полученные соотношения теряют свою применимость.

В части II книги смысл этого результата станет очевидным. Там же мы покажем, что найденные здесь соотношения действительно справедливы при любых возможных скоростях движения.