ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 26. Потенциалы электромагнитного поля вдали от излучения в дипольном приближении

Общие формулы для запаздывающих потенциалов, полученные в § 23, весьма сложны. Действительно, поскольку входящие в (23,22) и (23,23) выражения для плотности заряда и плотности тока, являются функциями времени запаздывания, для вычисления потенциалов в момент времени t необходимо в соответствующих интегралах брать значения этих величин в разные моменты времени в каждой точке системы Поэтому, кроме рассмотренного в предыдущем параграфе случая единичного точечного заряда, не удается получить конкретных точных выражений для потенциалов с помощью общих формул (23,22) и (23,33).

Если, однако, точка наблюдения находится достаточно далеко от системы движущихся зарядов, так что $|\boldsymbol{r}| \gg L'$, где $L' \sim |V'|^{1/3}$ — характерный линейный размер системы, то выражения (23,22) и (23,23) допускают упрощения. Именно, выражение $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ можно разложить в ряд, как это было сделано при вычислении полей неподвижных (§ 15) и медленно движущихся (§ 21) зарядов. Тогда получаем

$$\varphi = \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \approx$$

$$\approx \int \left(\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \rho\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV' =$$

$$= \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV'}{r} + \int \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3} \rho\left(\boldsymbol{r}', t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV', \qquad (26,1)$$

где r — расстояние от точки наблюдения до начала координат.

Необходимо подчеркнуть, что $\int \rho(\boldsymbol{r}', \tau)\, dV' \neq e$, т. е. не является полным зарядом системы. Действительно, значение плотности в этом интеграле зависит от аргумента $\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ и представляет сложную функцию координат $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}$ и времени. Время запаздывания для каждой точки в объеме V' различное. По этой причине интегралы в (26,1) не могут быть вычислены в общем виде.

Дальнейшее упрощение возникает в том случае, если вместо различного времени запаздывания для каждой точки системы ввести одно общее время запаздывания для всей системы. Именно, написав аргумент $\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ в виде

$$\tau \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} = \tau_0 + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}, \qquad (26,2)$$

мы видим, что полное время запаздывания $\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$ слагается из двух частей. Первая из них, равная $\frac{r}{c}$ и именуемая временем запаздывания системы, представляет время, требующееся для распространения электромагнитного поля от начала координат до точки наблюдения. Вторая часть, равная $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$ и именуемая собственным запаздыванием, также имеет простой смысл: это время, которое требуется для распространения поля в пределах системы. По порядку величины $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} \sim \frac{L'}{c}$, и при $|\boldsymbol{r}| \gg L'$ собственное запаздывание $\frac{|\boldsymbol{r}'|}{c}$ по абсолютной величине мало по сравнению с $\frac{|\boldsymbol{r}|}{c}$. Это еще не означает, однако, что плотность заряда можно разложить в ряд по малому параметру $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$, написав

$$\rho(\boldsymbol{r}', \tau) = \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) =$$
$$= \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}\right) \approx \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\cdot\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} =$$
$$= \rho(\boldsymbol{r}', \tau_0) + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}\,\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0). \qquad (26,3)$$

Действительно, если за время, равное времени собственного запаздывания $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$, конфигурация зарядов в системе успеет заметно измениться, т. е. если за это время заряды успеют заметно передвинуться в системе, то плотность заряда в момент времени $t - \frac{r}{c}$ будет существенно отличаться от плотности заряда в момент времени $t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$. Иными словами, плотность заряда ρ будет быстро изменяющейся функцией своего аргумента, и пользоваться равенством (26,3) недопустимо. Для того чтобы это равенство имело место, необходимо, чтобы за время $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$, в течение которого поле, распространяющееся со скоростью c, прошло по системе, заряды в системе, движущиеся со скоростью v, не успели заметно сдвинуться. За время $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$ заряды проходят путь порядка $v\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} \sim v\frac{L'}{c}$. Если этот путь мал по сравнению с размерами системы, можно считать, что за время собственного запаздывания расположение зарядов в системе не успевает измениться.

Таким образом, можно считать, что при

$$v\frac{L'}{c} \ll L',$$

или при скоростях движения, удовлетворяющих неравенству

$$v \ll c, \tag{26,4}$$

изменение конфигурации за время собственного запаздывания мало. При этом $\rho(\boldsymbol{r}', \tau)$ является медленно изменяющейся функцией своего аргумента. Это значит, что малым изменениям τ отвечают малые изменения ρ и можно пользоваться разложением ρ по степеням малого запаздывания. Подставляя (26,3) в (26,1) и ограничиваясь членами разложения, содержащими наименьшие степени $\frac{1}{r}$, находим

$$\begin{aligned}\varphi &\approx \int \left(\frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\left(\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0) + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\right)dV' \approx \\ &\approx \int \left\{\frac{\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)}{r} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr^2}\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\right\}dV' = \\ &= \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'}{r} + \frac{\boldsymbol{n}}{cr}\int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV',\end{aligned} \tag{26,5}$$

где $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Слагаемое $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3}\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)$ мало по сравнению со слагаемым $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr^2}\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)$ на достаточно большом расстоянии от системы.

В формуле (26,5) сделано весьма существенное упрощение по сравнению с (26,1), поскольку плотность заряда во всех точках системы берется в один и тот же момент времени

$$\tau_0 = t - \frac{r}{c}.$$

Первое слагаемое в (26,5) имеет простой смысл: $\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0) = \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{r}{c}\right)$ представляет плотность заряда в системе в момент времени τ_0. Интеграл $\int \rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'$ дает полный заряд системы. Для электронейтральной системы он равен нулю. В этом случае имеем

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{n}{cr}\int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'. \tag{26,6}$$

Интеграл в правой части формулы (26,6) перепишем, воспользовавшись уравнением непрерывности (5,3):

$$\int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \int \boldsymbol{r}'\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau_0}\,dV' = -\int \boldsymbol{r}'\operatorname{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'.$$

Последний интеграл удобно вычислить в координатном представлении:

$$\int x'\frac{\partial j_{x'}}{\partial x'}\,dx' = x'j_{x'}\Big|_{x_1'}^{x_2'} - \int j_{x'}\,dx',$$

где x_1' и x_2' — границы области движения зарядов, на которых плотность тока обращается в нуль, так что

$$\int x'\frac{\partial j_{x'}}{\partial x'}\,dx' = -\int j_{x'}\,dx'.$$

Соответственно в векторном виде получим

$$\int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \int \boldsymbol{j}\,dV'. \tag{26,7}$$

Подставляя (26,7) в (26,6), находим скалярный потенциал в зависимости от плотности тока в системе

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{n}{cr}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'. \tag{26,8}$$

Аналогично можно получить выражение для вектора-потенциала, разлагая в ряд выражение $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ в формуле (23,23) и пренебрегая собственным запаздыванием:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{cr}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'. \tag{26,9}$$

Сравнивая (26,8) и (26,9), находим, что между φ и $\boldsymbol{A}$ существует простая связь:

$$\varphi = \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}. \tag{26,10}$$

Интеграл $\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'$ имеет простой смысл. Действительно, из определения дипольного момента (15,14), мы видим, что

$$\int \boldsymbol{j}\,dV' = \int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \frac{\partial}{\partial\tau}\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0), \tag{26,11}$$

где $\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)$ — производная дипольного момента по времени, взятая в момент времени τ_0. При этом мы воспользовались тем, что $\boldsymbol{r}'$ — независимая переменная интегрирования, не зависящая от τ_0.

С помощью (26,11) выражения (26,8) и (26,9) можно представить в виде

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{cr}, \tag{26,12}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{cr}. \tag{26,13}$$

Мы видим, что в том приближении, когда можно пренебречь собственным запаздыванием, потенциалы поля вдали от системы определяются значением производной по времени от ее дипольного момента. Поэтому такое приближение при вычислении потенциалов поля называется дипольным приближением. Условием применимости дипольного приближения является выполнение неравенства (26,4).

В дипольном приближении потенциалы поля вдали от электронейтральной системы убывают по закону $1/r$, в то время как аналогичный электростатический потенциал электронейтральной системы неподвижных зарядов, обладающей дипольным моментом, изменяется по закону $1/r^2$.

Легко проверить, что для потенциалов, найденных в дипольном приближении, выполнено условие Лоренца:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{r} = \\ = \frac{1}{cr}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0) + \frac{1}{c}\left(\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0), \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) \approx \frac{1}{cr}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0). \tag{26,14}$$

Как и при вычислении (26,5), второй член, в сумме пропорциональный $1/r^2$ и малый по сравнению с первым, пропорциональным $1/r$, может быть опущен. Мы видим, что при дифференцировании по координатам вдали от излучателя величину $1/r$ можно считать постоянной. Далее, по формуле (1,39) имеем

$$\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0) = \frac{\partial\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{\partial\tau_0}\operatorname{grad}\tau_0 = -\ddot{\boldsymbol{d}}\,\frac{\boldsymbol{r}}{cr} = -\frac{\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}}{c}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)\,\boldsymbol{n}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\dot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}}{r} \approx \frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{n}}{r}\ddot{\boldsymbol{d}}(\tau_0),$$

поэтому

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

как и должно было быть.

Полученные результаты имеют простой и весьма важный смысл: при движении зарядов в системе (изменении ее дипольного момента во времени) в окружающем пространстве возникает электромагнитное поле. Потенциалы этого поля сравнительно медленно (по закону $1/r$) убывают с расстоянием от системы и зависят от времени.

Система неравномерно движущихся зарядов является излучателем.

В последующих параграфах мы рассмотрим более подробно поле излучения и свойства излучающих систем.

§ 27. Электромагнитное поле дипольного излучения вдали от излучателя

Зная распределение потенциалов, можно найти значения магнитного и электрического полей. Имеем

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{r}.$$

При вычислении ротора вдали от излучателя следует проводить вычисление так же, как и при вычислении дивергенции в формуле (26,14): при дифференцировании по координатам множитель $\frac{1}{r}$ следует считать постоянным. Тогда по формуле (I,40) находим

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{cr}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0) = \frac{1}{cr}\left[\operatorname{grad}\tau_0, \frac{d\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{d\tau_0}\right] = \frac{1}{c}[\dot{A}\boldsymbol{n}] = \frac{1}{c^2 r}[\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}]. \quad (27,1)$$

Мы опустили значок τ_0 при $\boldsymbol{d}$. Однако здесь и *во всех* дальнейших соотношениях этого параграфа $\boldsymbol{d}$ является функцией аргумента $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$.

Для любой функции запаздывающего аргумента $t - \frac{r}{c}$ имеем

$$\operatorname{grad} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{df}{d\tau_0}\operatorname{grad}\tau_0 = -\dot{f}\,\frac{\boldsymbol{n}}{c},$$