Таким образом,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)\, \boldsymbol{n}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\dot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}}{r} \approx \frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{n}}{r}\ddot{\boldsymbol{d}}(\tau_0),$$

поэтому

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

как и должно было быть.

Полученные результаты имеют простой и весьма важный смысл: при движении зарядов в системе (изменении ее дипольного момента во времени) в окружающем пространстве возникает электромагнитное поле. Потенциалы этого поля сравнительно медленно (по закону $1/r$) убывают с расстоянием от системы и зависят от времени.

Система неравномерно движущихся зарядов является излучателем.

В последующих параграфах мы рассмотрим более подробно поле излучения и свойства излучающих систем.

## § 27. Электромагнитное поле дипольного излучения вдали от излучателя

Зная распределение потенциалов, можно найти значения магнитного и электрического полей. Имеем

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{r}.$$

При вычислении ротора вдали от излучателя следует проводить вычисление так же, как и при вычислении дивергенции в формуле (26,14): при дифференцировании по координатам множитель $\frac{1}{r}$ следует считать постоянным. Тогда по формуле (I,40) находим

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{cr} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0) = \frac{1}{cr}\left[\operatorname{grad} \tau_0, \frac{d\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{d\tau_0}\right] = \frac{1}{c}[\dot{A}\boldsymbol{n}] = \frac{1}{c^2 r}[\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}]. \quad (27,1)$$

Мы опустили значок $\tau_0$ при $\boldsymbol{d}$. Однако здесь и *во всех* дальнейших соотношениях этого параграфа $\boldsymbol{d}$ является функцией аргумента $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$.

Для любой функции запаздывающего аргумента $t - \frac{r}{c}$ имеем

$$\operatorname{grad} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{df}{d\tau_0} \operatorname{grad} \tau_0 = -\dot{f}\frac{\boldsymbol{n}}{c},$$

где положено

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial t} = \dot{f}.$$

Поэтому для электрического поля можно написать

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} + \frac{\boldsymbol{n}}{c}\dot{\varphi} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} + \frac{\boldsymbol{n}}{c}(\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{A}}) =$$
$$= \frac{1}{c}\{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{A}}) - \dot{\boldsymbol{A}}\} = \frac{1}{c}[[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{n}]\boldsymbol{n}] = \frac{1}{c^2 r}[[\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}]\boldsymbol{n}]. \qquad (27,2)$$

Сравнивая (27,2) с (27,1), мы видим, что векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны между собой соотношением

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{H}\boldsymbol{n}]. \qquad (27,3)$$

Напряженности электрического и магнитного полей зависят от координат и времени по закону:

$$|\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{E}| = f\,\frac{\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Как мы видели в § 23, последняя формула является выражением сферической волны. Амплитуда волны уменьшается вдали от излучателя по закону $\sim \frac{1}{r}$.

При этом векторы электрического и магнитного полей равны между собой по абсолютной величине, а по направлению перпендикулярных друг к другу и к радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$.

Область вдали от излучателя, в которой электромагнитное поле описывается сферическими волнами, носит название волновой зоны. Несколько ниже мы уточним это понятие.

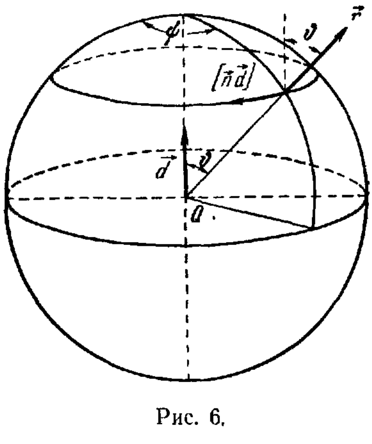

Рис. 6.

Введем сферическую систему координат $r$, $\theta$, $\psi$ (рис. 6) с полярной осью, ориентированной по вектору $\boldsymbol{d}$. Направление вектора $\boldsymbol{H}$ определяется вектором $[\boldsymbol{n}, \ddot{\boldsymbol{d}}]$, направленным по касательной к линии широты на поверхности сферы и ориентированным в сторону убывания азимутального угла $\psi$, так что

$$[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]_r = 0; \quad [\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]_\theta = 0;$$
$$[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]_\psi = -\ddot{d}\sin\theta.$$

Поэтому вектор $\boldsymbol{H}$ имеет в сферической системе координат следующие проекции:

$$H_r = 0; \quad H_\theta = 0; \quad H_\psi = \frac{\ddot{d}}{c^2 r}\sin\theta. \tag{27,4}$$

Вектор $\boldsymbol{E}$ направлен перпендикулярно к векторам $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{n}$ по касательной к линии долготы и ориентирован в сторону убывания полярного угла $\theta$. Его проекции равны

$$E_r = 0; \quad E_\theta = \frac{\ddot{d}}{c^2 r}\sin\theta; \quad E_\psi = 0. \tag{27,5}$$

Формулы (27,4) и (27,5) показывают, что напряженности поля имеют наибольшее значение при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (в экваториальной плоскости) и убывают до нуля по мере приближения к полярной оси.

Вычислим вектор Пойнтинга излучающей системы:

$$\sigma = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}] = \frac{c}{4\pi}H^2\boldsymbol{n} = \frac{c}{8\pi}(E^2+H^2)\boldsymbol{n} =$$
$$= cu\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{4\pi c^3 r^2}[\dot{A}n]^2\boldsymbol{n} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2}[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]^2\boldsymbol{n}. \tag{27,6}$$

Вектор Пойнтинга оказывается направленным по радиусу-вектору и по абсолютной величине равным

$$\sigma = \frac{1}{4\pi c^3}\frac{\ddot{d}^2}{r^2}\sin^2\theta. \tag{27,7}$$

То обстоятельство, что вектор Пойнтинга отличен от нуля и всегда направлен от излучающей системы, имеет очевидный смысл: имеется поток электромагнитной энергии, излучаемой системой в окружающее пространство. Формула (27,7) определяет плотность потока излучаемой энергии в зависимости от ориентации в пространстве (угла $\theta$) и расстояния до излучающей системы. Наличие потока энергии оправдывает введенные нами раньше термины поля «излучение» и «излучатель».

Подчеркиваем, что, как видно из (27,6), при фактическом наблюдении излучения в некотором направлении $\boldsymbol{n}$ играет роль только значение компоненты вектора второй производной от дипольного момента ($\ddot{\boldsymbol{d}}$) в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{n}$.

Поток энергии через векторную площадку $d\Sigma$, стягивающую телесный угол $d\Omega$, называется интенсивностью излучения в телесном угле $d\Omega$. Для интенсивности излучения $dI$ можно написать

$$dI = \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{\Sigma} = \sigma\, d\Sigma = \sigma r^2\, d\Omega = \frac{c}{4\pi}H^2 r^2\, d\Omega = \frac{\ddot{d}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3 r^2}r^2\, d\Omega =$$
$$= \frac{|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2}{4\pi c^3}\sin^3\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]^2}{4\pi c^3}\, d\Omega. \tag{27,8}$$

Полный поток энергии, излучаемый системой, именуемый обычно полной интенсивностью излучения, равен

$$-\frac{dE}{dt} = I = \int \sigma\, d\Sigma = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{2}{3}\frac{\ddot{d}^2}{c^3}. \qquad (27,9)$$

Здесь $\left(-\frac{dE}{dt}\right)$ — убыль энергии излучающей системы за 1 секунду.

Интенсивность излучения в дипольном приближении определяется только значением $\ddot{d}\left(t-\frac{r}{c}\right)$. Иными словами, в момент времени $t$ значение $I$ в данной точке зависит от величины $\ddot{d}$ в предыдущий момент времени $t-\frac{r}{c}$. В остальном же интенсивность излучения не зависит от расстояния до излучающей системы, как это и следовало ожидать на основании закона сохранения энергии: поток энергии, проходящий в единицу времени через любую замкнутую поверхность, окружающую излучающую систему, имеет одно и то же значение.

В заключение укажем на соотношение, имеющее место для плотности энергии и импульса излучения. В силу формул (27,6) и (13,11) можем написать

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{\sigma} = \frac{u_0}{c}\,\boldsymbol{n}. \qquad (27,10)$$

С этим важным соотношением мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем.

Мы видим, что при излучении излучающая система теряет не только энергию, но и импульс, которые превращаются в энергию и импульс излучения.

## § 28. Дипольное излучение простейших систем

В качестве примера использования формул дипольного излучения рассмотрим несколько простейших систем.

Для одиночного заряда, получающего ускорение под действием силы $\boldsymbol{F}$, можем написать

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= e\boldsymbol{r}, \\ \ddot{\boldsymbol{d}} &= e\ddot{\boldsymbol{r}} = e\frac{\boldsymbol{F}}{m}, \end{aligned}\right\} \qquad (28,1)$$

где $\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{w}$ — ускорение, с которым движется заряд. Поэтому

$$\sigma = \frac{c}{4\pi} H^2 \boldsymbol{n} = \frac{e^2 w^2 \sin^2\theta}{4\pi c^3 r^2}\,\boldsymbol{n}. \qquad (28,2)$$