столь малых масштабов. Оказывается, что квантовые эффекты, кладущие предел применимости классических представлений к микрочастицам, начинают играть роль на расстояниях порядка $\Lambda = \frac{\hbar}{mc}$, где $\hbar$ — постоянная Планка, равная $1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг · сек*. Величина Λ, равная $2 \cdot 10^{-10}$ *см*, носит название комптоновской длины волны. С этой величиной мы столкнемся в § 17 ч. II, где будет рассмотрен так называемый эффект Комптона.

В квантовой механике будет подробно разобран вопрос о границах применимости соотношений классической теории и будет дано доказательство приведенного утверждения.

§ 30. Ширина излучаемых линий

Реакция излучения оказывает существенное влияние на свойства излучаемого поля. Именно, мы покажем, что излучатель, который без учета действия силы реакции излучал бы монохроматические электромагнитные волны с частотой ω_0, в действительности излучает совокупность частот близких, но не равных ω_0.

Иными словами, благодаря эффекту затухания монохроматическое излучение превращается в излучение непрерывного спектра волн со всевозможными частотами.

Доказательство этого утверждения мы проведем на простейшей модели излучающей системы — линейном гармоническом осцилляторе. Пусть заряженная частица движется под действием квазиупругой силы $(-kx)$ вдоль оси x, так что уравнение ее движения имеет вид

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{F_s}{m},$$

или

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{2}{3}\frac{e^2 \dot{w}}{mc^3},$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота колебаний осциллятора в отсутствие силы F_s.

Считая F_s малой по сравнению с квазиупругой силой $(-kx)$, можно положить ускорение равным ускорению гармонического осциллятора без реакции излучения, т. е.

$$w = -\omega_0^2 x; \quad \dot{w} = -\omega_0^2 \dot{x},$$

и написать

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{30,1}$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}. \tag{30,2}$$

Решением уравнения (30,1) при $\gamma \ll \omega_0$ служит выражение

$$x \approx x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i\omega_0 t}. \tag{30,3}$$

При этом подразумевается, что в (30,3) и последующих формулах, содержащих комплексные выражения, следует взять вещественную часть. Решение (30,3) отвечает начальному условию:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Формула (30,3) показывает, что благодаря реакции излучения, определяемой величиной γ, колебания осциллятора имеют затухающий характер. Коэффициент затухания $\frac{\gamma}{2}$ аналогичен коэффициенту затухания механического осциллятора при наличии силы трения. Это оправдывает второе название силы F_s — силы лоренцева трения.

Для нахождения излучения затухающего осциллятора напишем его ускорение в виде

$$w = \ddot{x} = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i\omega_0 t},$$

где A — постоянная (равная, в том же приближении $(\gamma \ll \omega_0)$, $A \approx -x_0\omega_0^2$).

Ускорение затухающего осциллятора не является периодической функцией времени. Поэтому излучаемые таким осциллятором электромагнитные волны не имеют определенной частоты. Напротив, в излучении будут представлены все частоты $0 \leqslant \omega < \infty$. Это означает, что затухающий осциллятор излучает сплошной спектр частот.

Нас будет интересовать в дальнейшем распределение энергии в этом спектре, т. е. доля полной энергии, излучаемой осциллятором, приходящаяся на интервал частот ω, $\omega + d\omega$. Эта функция $I(\omega)$, носящая название спектральной функции распределения Лоренца, связана с полной энергией I_0, излучаемой осциллятором,

$$I_0 = \int_0^\infty I(\omega)\, d\omega. \tag{30,4}$$

Полная энергия, излучаемая осциллятором, равна

$$I_0 = \int_0^\infty I\, dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} \int_0^\infty w^2\, dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^\infty w^2\, dt. \tag{30,5}$$

При этом мы распространим пределы интегрирования на область отрицательных времен, поскольку при $t<0$ осциллятор покоился и подынтегральная функция тождественно равна нулю.

Разложим ускорение в интеграл Фурье:

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

где компонента Фурье $W(\omega)$ равна

$$W(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\, e^{-i\omega t}\, dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} w(t)\, e^{-i\omega t}\, dt=$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\left[\frac{\gamma}{2}-i(\omega_0-\omega)\right]}.$$

По формуле (II, 9) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2\, dt=\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2\, d\omega=\frac{A^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{A^2}{\gamma}. \qquad (30,6)$$

Подставляя формулу (30,6) в (30,5), находим

$$I_0=\frac{1}{3\pi}\,\frac{e^2}{c^3}\,A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{A^2}{\gamma}, \qquad (30,7)$$

откуда

$$A^2=\frac{3c^3\gamma}{2e^2}\, I_0. \qquad (30,8)$$

С другой стороны, сравнивая (30,7) и (30,4) и учитывая, что спектральное распределение определено только для существенно положительных значений частоты, находим

$$I(\omega)=\frac{I_0}{2\pi}\,\frac{\gamma}{\left[(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}\right]}. \qquad (30,9)$$

Спектральные функции распределения для разных значений $\omega_0/2\gamma$ представлены на рис. 7. Они имеют резкий максимум при $\omega\approx\omega_0$, т. е. при частоте, которая излучалась бы осциллятором в отсутствие затухания,

$$I(\omega_0)=\frac{2I_0}{\pi\gamma}.$$

При $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$ излучаемая интенсивность равна

$$I\left(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{I(\omega_0)}{2},$$

т. е. вдвое меньше интенсивности в максимуме. По этой причине величина $\gamma/2$ носит название полуширины излучаемой

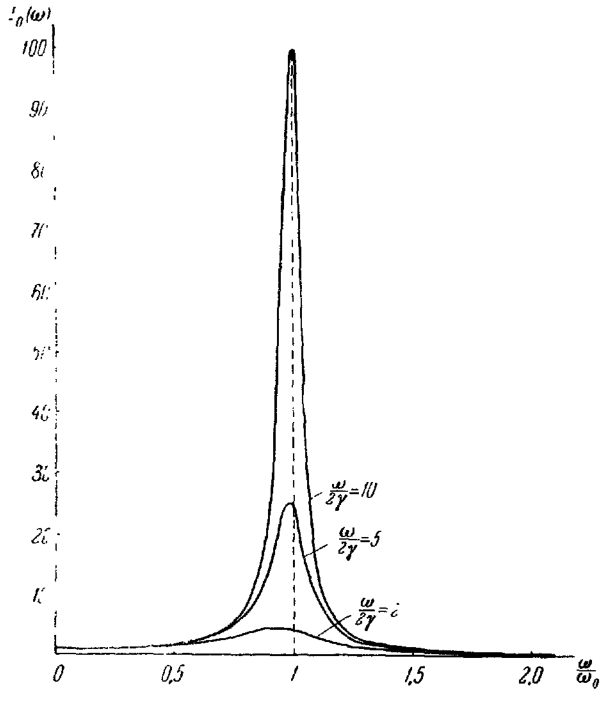

Рис. 7.

линии. Согласно (30,2) полуширине линии $\gamma/2$ отвечает интервал длин волн

$$|\Delta\lambda| = 2\pi\left|\Delta\frac{c}{\omega_0}\right| = \frac{2\pi c\,\Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} =$$
$$= \frac{\pi c}{\omega_0^2}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3 m}\omega_0^2 = \frac{2\pi}{3}\frac{e^2}{mc^2} = \frac{2\pi}{3}r_0,$$

не зависящий от длины волны и по порядку величины равный классическому радиусу электрона.