## § 31. Влияние магнитного и электрического полей на излучение (эффекты Зеемана и Штарка). Квадрупольное и магнитное дипольное излучение

Важным открытием, сыгравшим существенную роль в утверждении электромагнитной теории света, было обнаружение влияния магнитного поля на излучение, названное эффектом Зеемана.

Мы рассмотрим теорию эффекта Зеемана на обычной классической модели атомного излучателя — пространственном гармоническом осцилляторе. Предположим, что излучающий гармонический осциллятор помещен в магнитное поле $\boldsymbol{H}$, направление которого выберем за ось $z$. Уравнения движения осциллятора в проекциях можно получить, используя выражение для силы Лоренца:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega_L \dot{y}, \tag{31,1}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega_L \dot{x}, \tag{31,2}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \tag{31,3}$$

где $\omega_0$ — частота колебаний осциллятора в отсутствие магнитного поля и $\omega_L = \frac{eH}{2mc}$ — так называемая ларморова частота.

Уравнение (31,3) показывает, что в направлении поля частота колебаний не изменяется.

Будем искать решение уравнений (31,1) и (31,2) в виде

$$x = ae^{i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t}.$$

Подстановка в (31,1) и (31,2) дает

$$a(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega_L \omega b = 0,$$

$$b(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega_L \omega a = 0.$$

Приравнивая нулю детерминант системы, находим

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\omega_L^2 \omega^2,$$

откуда

$$\omega_1^2 + 2\omega_L \omega_1 - \omega_0^2 = 0,$$

$$\omega_2^2 - 2\omega_L \omega_2 - \omega_0^2 = 0,$$

где $\omega_1$ и $\omega_2$ — возможные значения частоты. Решая эти уравнения, находим

$$\omega_1 = -\omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}, \tag{31,4}$$

$$\omega_2 = \omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}. \tag{31,5}$$

При этом у корня выбран положительный знак, поскольку частота $\omega$ — величина существенно положительная.

Таким образом, излучение пространственного осциллятора эквивалентно излучению трех линейных осцилляторов: одного вдоль поля $\boldsymbol{H}$ с частотой $\omega_0$ и двух других в плоскости $(xy)$ с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Если направление наблюдения перпендикулярно к полю $\boldsymbol{H}$, например, совпадает с осью $x$, то наблюдается излучение, определяемое компонентами вектора дипольного момента, лежащими в плоскости $yz$. В этой плоскости лежат компоненты:

$$\ddot{d}_y = e\ddot{y} = -e\left(\omega_1^2 b_1 e^{i\omega_1 t} + \omega_2^2 b_2 e^{i\omega_2 t}\right), \qquad \ddot{d}_z = e\ddot{z} = -e\omega_0^2 c e^{i\omega_0 t}.$$

Таким образом, при наблюдении вдоль оси $x$ должны наблюдаться три частоты — $\omega_1$, $\omega_0$ и $\omega_2$ (так называемый триплет Зеемана).

Измеряя расстояние между крайними линиями,

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{eH}{mc}, \tag{31,6}$$

можно определить значение $e/m$ для излучающей частицы. Экспериментально Зееманом было обнаружено, что если пары веществ, находящихся в атомном состоянии, помещены в магнитное поле, то в их излучении действительно наблюдается триплет. Расстояние между крайними компонентами триплета имеет значение, с большой степенью точности отвечающее по формуле (31,6) отношению $e/m$ для электрона.

Вскоре выяснилось, однако, что вместо триплета Зеемана в излучении целого ряда атомов в магнитном поле наблюдалась более сложная картина расщепления излучаемых линий. Это явление, получившее название аномального эффекта Зеемана, оказалось встречающимся несравненно чаще, чем нормальный эффект Зеемана.

Классическая теория излучения не могла дать удовлетворительного объяснения аномальному эффекту Зеемана.

В квантовой механике мы увидим, каковы причины, вызывающие аномальный эффект Зеемана, и почему осцилляторная модель атомного излучателя дает правильные результаты для нормального эффекта Зеемана.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии постоянного во времени внешнего электрического поля на излучатель. Во внешнем электрическом поле $\boldsymbol{E}$ уравнения движения гармонического осциллятора имеют вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}.$$

Поскольку на протяжении атомной системы внешнее поле можно считать неизменным и поле постоянно во времени, можно ввести новую координату,

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}-\frac{e\boldsymbol{E}}{\omega_0^2},$$

для которой имеем

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1+\omega_0^2\boldsymbol{r}_1=0. \tag{31,7}$$

Уравнение (31,7) означает, что гармонический осциллятор при наличии постоянного внешнего поля совершает колебания с той же частотой $\omega_0$, но около смещенного положения равновесия.

В приближении ангармонического осциллятора классическая теория приводит к изменению излучаемой частоты во внешнем электрическом поле. Однако наблюдавшееся на опыте сложное расщепление линий у атомного водорода (эффект Штарка) получило объяснение только в квантовой механике.

Мы видели выше, что в некоторых случаях система зарядов не может излучать в дипольном приближении. Это не означает, разумеется, что такая система вовсе не может излучать.

Если в дипольном приближении излучение отсутствует, следует искать старшие члены разложения по степеням собственного запаздывания в системе, которые будут определять излучение высших порядков — квадрупольное, октупольное и т. п. Мы ограничимся нахождением излучения следующего (после дипольного приближения) порядка.

Напишем вектор-потенциал излучающей системы на большом расстоянии от системы в виде, аналогичном (26,5):

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{c}\int\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ \tau_0)+\frac{r'r}{cr}\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\tau_0}\right]dV'=$$
$$=\frac{1}{cr}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \tau_0)\,dV'+\frac{1}{c^2r}\int\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\tau_0}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}')\,dV'=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2. \tag{31,8}$$

Первое слагаемое в (31,8) описывает, согласно (26,9), дипольное излучение. Нас поэтому будет интересовать только второе слагаемое:

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{1}{c^2r}\int\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\tau_0)}{\partial\tau_0}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}')\,dV'=\frac{1}{c^2r}\frac{\partial}{\partial\tau_0}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}')\,dV'.$$

При этом мы воспользовались тем, что постоянный вектор $\boldsymbol{n}$ и переменная интегрирования $\boldsymbol{r}'$ не зависят от времени, и изменили порядок дифференцирования и интегрирования. Значение интеграла берется в момент времени $\tau_0$:

$$\boldsymbol{A}_2=\frac{1}{c^2r}\frac{\partial}{\partial\tau_0}\int(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \tau_0)\,dV'. \tag{31,9}$$

Преобразуем подынтегральное выражение, симметризовав его с помощью формулы (I,6). Тогда получим

$$A_2 = \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \int\limits_0 [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\boldsymbol{n}]\, dV' \right\} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int \{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\}\, dV'. \tag{31,10}$$

Из определения магнитного момента (22,1) следует, что первый интеграл можно представить в виде

$$\frac{1}{2c} \int [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,\boldsymbol{n}]\, dV' = [\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}].$$

Чтобы выяснить смысл второго интеграла, удобно перейти от интегрирования к суммированию, спроектировав векторное выражение на некоторую ось $\alpha$ в декартовой системе координат:

$$\int \{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\}_\alpha dV' = \sum_i \{e_i \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{r}'_i \boldsymbol{n}) + e_i \boldsymbol{r}'_i(\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{n})\}_\alpha =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \sum e \boldsymbol{r}'_i(\boldsymbol{r}'_i \boldsymbol{n}) \right\}_\alpha = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{\mathscr{D}_{\alpha\beta} n_\beta\},$$

где $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$ — квадрупольный момент системы, определенный формулой (16,3). По индексу $\beta$ ($\beta = x, y, z$) производится суммирование. Переходя к векторному выражению, мы можем написать

$$\int \{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\}\, dV' = \frac{\partial}{\partial \tau_0} \boldsymbol{\mathscr{D}}, \tag{31,11}$$

где, по определению, вектор $\boldsymbol{\mathscr{D}}$ равен

$$\mathscr{D}_\alpha = \mathscr{D}_{\alpha\beta} n_\beta. \tag{31,12}$$

Тогда окончательно находим для вектор-потенциала

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\dot{\boldsymbol{d}}}{cr} + \frac{1}{cr}[\dot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}] + \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{A}_{\text{дип}} + \boldsymbol{A}_{\text{маг. дип}} + \boldsymbol{A}_{\text{квадр}}, \tag{31,13}$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу $\tau_0$, от которого зависят векторы $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{D}$.

Напряженности полей могут быть найдены с помощью (10,1) и (10,2).

В выражении (31,13) первое слагаемое описывает дипольное излучение. Второе определяется производной по времени от магнитного момента и, естественно, получило наименование магнитного дипольного излучения. Последнее слагаемое содержит вторую производную от квадрупольного момента. Оно определяет квадрупольное излучение.

Оценим по порядку величины, слагаемые в (31,13):

$$\dot{\boldsymbol{d}} \sim eL'\omega; \quad \dot{\boldsymbol{M}} \sim \frac{e}{c} vL'\omega \sim \frac{eL'^2\omega^2}{c}; \quad \ddot{D} \sim eL'^2\omega^2.$$

Поэтому

$$\frac{|[\ddot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}]|}{|\ddot{\boldsymbol{d}}|} \sim \frac{evL'}{ecL'} \sim \frac{v}{c},$$

$$\frac{\frac{1}{c}|\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta|}{|\ddot{\boldsymbol{d}}|} \sim \frac{e\omega^2 L'^2}{ec\omega L'} \sim \frac{L'\omega}{c} \sim \frac{L'}{\lambda},$$

где $L'$ — характерный размер системы и $\lambda$ — длина волны излучения.

Поскольку по нашим допущениям $v \ll c$ и $L' \ll \lambda$, слагаемые, отвечающие магнитному дипольному и квадрупольному излучениям, весьма малы по сравнению с первым слагаемым, описывающим дипольное излучение. Это означает, что магнитное дипольное и квадрупольное излучения играют роль только для систем, у которых дипольное излучение отсутствует. В общем случае нельзя сказать, какое из этих двух слагаемых вносит основной вклад в излучение.

Вычислим интенсивность магнитного дипольного и квадрупольного излучений в отдельности.

Согласно формулам (27,8) и (27,1), интенсивность магнитного дипольного излучения

$$dI_\text{м} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2\, d\Omega = \frac{1}{4\pi c} [\dot{A}\boldsymbol{n}]^2 r^2\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3} [[\ddot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}]\,\boldsymbol{n}]^2\, d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{M}^2 \sin^3\theta\, d\theta\, d\psi. \qquad (31,14)$$

Интенсивность магнитного дипольного излучения определяется точно таким же выражением, что и интенсивность дипольного излучения (27,8), но в (31,14) вместо $\ddot{\boldsymbol{d}}$ стоит $\ddot{\boldsymbol{M}}$.

Полная интенсивность магнитного дипольного излучения получается интегрированием (31,14) по всем углам:

$$I_\text{м} = \frac{2}{3} \frac{(\ddot{\boldsymbol{M}})^2}{c^3}. \qquad (31,15)$$

Интенсивность магнитного дипольного излучения меньше, чем интенсивность дипольного излучения в отношении $\left(\frac{v}{c}\right)^2$.

Подчеркнем, что магнитное дипольное излучение отсутствует у систем, магнитный момент которых пропорционален механическому моменту. Согласно сказанному в § 22, это имеет место для систем с постоянным значением отношения $\frac{e}{m}$, а также для системы из двух произвольных частиц. В силу последнего, магнитное дипольное излучение отсутствует при соударениях двух частиц.

Перейдем теперь к расчету интенсивности квадрупольного излучения. Подставляя значение $A_{\text{квадр}}$ в общую формулу (27,7) и повторяя вычисления § 27, находим

$$dI_{\text{квадр}} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 \, d\Omega = \frac{1}{4\pi c} [\dot{A}_{\text{квадр}} \boldsymbol{n}]^2 r^2 \, d\Omega = \\ = \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{1}{36c^4} [\dddot{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{n}]^2 \, d\Omega. \qquad (31,16)$$

Преобразуем квадрат векторного произведения по формуле (I,5) с учетом определения (31,12):

$$[\dddot{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{n}]^2 = (\dddot{\boldsymbol{D}})^2 - (\boldsymbol{n} \dddot{\boldsymbol{D}})^2 = \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\lambda\mu} n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu. \qquad (31,17)$$

По парным индексам подразумевается суммирование.

Угловая зависимость $dI_{\text{квадр}}$ оказывается весьма сложной. Однако полное излучение в единицу времени может быть вычислено сравнительно просто. Интегрируя (31,16) с учетом (31,17), получаем

$$I_{\text{квадр}} = \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{1}{36c^4} \left\{ \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\gamma} \int n_\beta n_\gamma \, d\Omega - \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\lambda\mu} \int n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu \, d\Omega \right\}. \qquad (31,18)$$

Вычисление даст

$$\int n_\beta n_\gamma \, d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{\beta\gamma}, \qquad (31,19)$$

$$\int n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu \, d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}). \qquad (31,20)$$

Поэтому для $I$ находим

$$I_{\text{квадр}} = \frac{1}{36c^5} \left\{ \frac{1}{3} (\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{15} [\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\alpha} \dddot{\mathscr{D}}_{\beta\beta} + 2 (\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta})^2] \right\} = \frac{1}{180c^5} (\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta})^2, \qquad (31,21)$$

поскольку, согласно (16,16), сумма диагональных элементов $\mathscr{D}_{\alpha\alpha}$ всегда равна нулю. При периодическом изменении квадрупольного момента квадрупольное излучение оказывается пропорциональным $\omega^6$. Множитель $\frac{1}{c^5}$ в (31,21) делает его интенсивность весьма малой. Тем не менее существуют системы, для которых квадрупольное излучение играет основную роль. Это, прежде всего, атомные ядра, не обладающие дипольным излучением (дипольные моменты ядер, как и всяких других заряженных систем, можно считать равными нулю (см. § 15)).

Другим примером может служить система, состоящая из частиц с одинаковыми значениями $\frac{e}{m}$.