§ 32. Общий случай излучения — спектральное разложение, волновая и квазистатическая зона, учет собственного запаздывания*

Рассмотрим теперь несколько более общий случай излучения системой движущихся зарядов.

Не ограничивая общности, можно считать, что плотность тока в системе и плотность заряда допускают разложение в интеграл Фурье:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t) = \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{32,1}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}', t) = \int \rho(\boldsymbol{r}', \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{32,2}$$

В этих разложениях мы пользуемся нормировкой (II,1) и считаем формально частоту как положительной, так и отрицательной. В действительности частота ω — величина существенно положительная, так что это представление следует дополнить условием: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \omega) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', -\omega)$. При этом величина $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t)$ будет иметь вещественное значение. Тогда, разлагая в интеграл Фурье потенциалы поля

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{32,3}$$

и подставляя разложение (32,1)—(32,3) в уравнение (23,23) для вектора-потенциала, находим

$$\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \omega)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, e^{i\omega\left(t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}\, d\omega\, dV,$$

откуда для компоненты Фурье вектора-потенциала получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \omega)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, e^{-i\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV'. \tag{32,4}$$

Аналогично

$$\varphi(\boldsymbol{r}, \omega) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', \omega)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, e^{-i\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV'. \tag{32,5}$$

Если плотность тока и плотность заряда заданы как функции координат, то по формулам (32,4) и (32,5) можно найти компоненты Фурье для потенциалов поля точно, не пренебрегая собственным запаздыванием в системе.

После этого выражения для самих потенциалов найдутся непосредственно по формуле обращения интеграла Фурье (II,2).

Таким образом, можно в принципе найти поле излучающей системы, не пренебрегая собственным запаздыванием, а также на любых расстояниях от излучающей системы. Ниже мы приведем простой пример такого расчета.

Если нас интересует поле на больших расстояниях от излучающей системы, то, полагая

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\simeq r-\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}{r},$$

причем $|\boldsymbol{r}|\gg|\boldsymbol{r}'|$, и вводя величину, именуемую волновым вектором,

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{n}, \tag{32,6}$$

где k — волновое число,

$$k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}, \tag{32,7}$$

и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, имеем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}',\ \omega)=\frac{e^{-ikr}}{cr}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \omega)\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\,dV', \tag{32,8}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}',\ \omega)=\frac{e^{-ikr}}{r}\int \rho(\boldsymbol{r}',\ \omega)\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\,dV'. \tag{32,9}$$

Часто формулы спектрального разложения применяются к определению поля одиночного заряда. В этом случае можно получить полезное представление $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}',\ \omega)$, заменив компоненту Фурье для плотности тока на саму плотность тока по формуле

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ \omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ t)\,e^{i\omega t}\,dt$$

и полагая

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ t)=e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_0(t)),$$

где $\boldsymbol{R}_0(t)$ — мгновенное положение заряда в момент времени t, $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt}$. Это дает

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}',\ \omega)=\frac{e^{ikr}}{2\pi cr}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e\boldsymbol{v}(t)\,e^{i\,[\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_0(t)]}\,dt. \tag{32.10}$$

Последняя формула позволяет найти компоненту Фурье вектор-потенциала по заданной траектории частицы — зависимости $\boldsymbol{R}_0$ от времени. Величина r представляет абсолютное значение расстояния от заряда до точки наблюдений в момент времени t. Если фурье-компонента вектора-потенциала на большом расстоянии от системы зарядов известна, то фурье-компоненты поля найдутся по формулам (27,1) и (27,3). Именно, имеем

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ t)=\int \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{c}\,[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{n}]=$$
$$=\frac{1}{c}\int i\omega\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega),\ \boldsymbol{n}]\,e^{i\omega t}\,d\omega,$$

откуда

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega)=i\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega),\ \boldsymbol{k}]. \tag{32,11}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{E}=\frac{i}{k}\,[\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega),\ \boldsymbol{k}]. \tag{32,12}$$

В общем случае излучающая система излучает всевозможные частоты или, как говорят, спектр частот $-\infty<\omega<\infty$.

Часто представляет интерес найти вес различных частот в спектре, т. е. относительную долю энергии, приходящуюся на данную частоту (или, точнее, на частоту, лежащую в интервале ω, $\omega+d\omega$). Представим полную излучаемую в телесный угол $d\Omega$ за время dt энергию в виде

$$-\Delta E=\int I\,dt=\frac{c}{4\pi}\int H^2r^2\,d\Omega\,dt=d\Omega\int I_\omega\,d\omega\,dt, \tag{32,13}$$

где $I_\omega d\omega d\Omega$ — интенсивность, излучаемая в телесном угле $d\Omega$ и в интервале частот $d\omega$.

Разлагая $\boldsymbol{H}$ в интеграл Фурье и пользуясь равенством Парсеваля (II,9), имеем

$$\int (\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ t))^2\,dt=4\pi\int (\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega))^2\,d\omega.$$

Тогда для интересующей нас интенсивности (энергия в единицу $d\omega$ времени) излучения в телесном угле $d\Omega$ в интервале частот получаем выражение

$$J_\omega\,d\Omega\,d\omega=c\,|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega)|^2\,r^2\,d\Omega\,d\omega=$$
$$=\frac{1}{c}\left|\left[\boldsymbol{k},\ \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \omega)\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\,dV'\right]\right|^2 d\Omega\,d\omega. \tag{32,14}$$

Фактическое спектральное распределение излучаемой энергии определяется, естественно, законом движения зарядов $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ t)$.

Предыдущие формулы существенно упрощаются, если плотности тока и заряда в системе изменяются по простому гармоническому закону

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ t)&=\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\,e^{i\omega_0 t},\\ \rho(\boldsymbol{r}',\ t)&=\rho_0(\boldsymbol{r}')\,e^{i\omega_0 t}.\end{aligned} \tag{32,15}$$

В этом случае система, естественно, излучает только одну частоту ω_0. Вектор-потенциал дается при этом общей формулой

$$A(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{e^{i\omega t}}{c}\int\frac{j_0(\boldsymbol{r}')\,e^{-i\frac{\omega_0}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'=A_0(\boldsymbol{r})\,e^{i\omega t},\qquad(32{,}16)$$

где амплитуда потенциала $A_0(\boldsymbol{r})$ равна, очевидно,

$$A_0(\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{j_0(\boldsymbol{r}')\,e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'.\qquad(32{,}17)$$

Вдали от излучаемой системы

$$A(\boldsymbol{r},\ t)\simeq\frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{cr}\int j_0(\boldsymbol{r}')\,e^{ikr'}\,dV'.\qquad(32{,}18)$$

Величина $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}')$ определяет, очевидно, запаздывание внутри системы (собственное запаздывание).

Рассмотрим теперь случай, когда собственным запаздыванием можно пренебречь. Для этого необходимо выполнение неравенства

$$kr'\ll 1$$

или

$$L'\ll\lambda.\qquad(32{,}19)$$

Мы видим, что условием пренебрежения собственным запаздыванием является малость геометрических размеров излучающей системы по сравнению с длиной волны излучения.

Предполагая выполненным условие (32,19), имеем в силу (26,11)

$$A(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{cr}\int j_0(\boldsymbol{r}')\,dV'=\frac{\dot{d}(\tau_0)}{cr},\qquad(32{,}20)$$

что совпадает с (26,13).

Найдем еще скалярный потенциал, не считая, однако, что расстояние до точки наблюдения велико по сравнению с длиной волны. Чтобы не повторять выкладок § 26, напишем выражение для скалярного потенциала, воспользовавшись условием Лоренца:

$$\varphi=-c\int\operatorname{div}A\,dt=-c\operatorname{div}\frac{\dot{d}(\tau_0)}{cr}=$$

$$=-e^{i\omega t}\operatorname{div}\frac{d_0e^{-ikr}}{r}=\frac{\boldsymbol{n}d(\tau_0)}{r}\left(ik+\frac{1}{r}\right).\qquad(32{,}21)$$

Мы видим, что могут реализоваться два предельных случая:

$$kr \sim \frac{r}{\lambda} \gg 1,$$

$$kr \sim \frac{r}{\lambda} \ll 1.$$

В первом случае, когда расстояние до излучателя велико по сравнению с его размерами, мы получаем

$$\varphi(\boldsymbol{r},\ t) = ik\,\frac{nd\,(\tau_0)}{r}, \tag{32,22}$$

что совпадает с (26,12). Таким образом, в области

$$r \gg \lambda \gg L'$$

справедливы все формулы § 26. Это — область далеких расстояний, или волновая зона.

В области расстояний

$$r \ll \lambda \gg L'$$

можно написать

$$\varphi(\boldsymbol{r},\ t) \simeq \frac{nd\,(\tau_0)}{r^2} = \frac{nd_0 e^{i\omega\tau_0}}{r^2}. \tag{32,23}$$

В этой области, именуемой ближней, или квазистатической, зоной, скалярный потенциал φ совпадает с потенциалом электростатического поля диполя, величина которого изменяется по гармоническому закону. Векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ в этой зоне мал по сравнению со скалярным в отношении $\frac{r}{\lambda}$. Это означает, что в квазистатической зоне поле имеет в основном характер электрического поля. Напряженность электрического поля изменяется во всей квазистатической зоне в одной фазе с изменением дипольного момента системы зарядов, и поле не имеет волнового характера.

Магнитное поле меньше электрического в отношении

$$\frac{|\boldsymbol{H}|}{|\boldsymbol{E}|} \sim \frac{r}{\lambda}$$

в отличие от волновой зоны, где выполнено соотношение (27,3). Мы видим, что при излучении длинных волн ($\lambda \gg L'$) поле излучающей системы имеет квазистатический характер в области $r \ll \lambda$ и волновой при $r \gg \lambda$. Угловое распределение электрического поля в обеих областях различно. В квазистатической зоне средний по времени поток энергии, характеризуемый вектором Пойнтинга, равен нулю. Таким образом, квазистатическая зона не дает вклада в излучение.

Выпишем еще выражения для полей в монохроматических волнах вдали от излучающей системы

$$\boldsymbol{H} = \frac{k^2}{r}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\, e^{i(\omega t - kr)}, \tag{32,24}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{k^2}{r}[[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\,\boldsymbol{n}]\, e^{i(\omega t - kr)} \tag{32,35}$$

и вблизи к ней

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{d}_0}{r^3}\, e^{i\omega t}, \qquad \boldsymbol{H} \simeq 0. \tag{32,26}$$

В волновой зоне вектор Пойнтинга определен формулой (27,6). Поэтому средняя по времени излучаемая интенсивность равна

$$\overline{I} = \frac{\omega^4 d_0^2}{3c^3} = \frac{c d_0^2}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4. \tag{32,27}$$

Она оказывается обратно пропорциональной четвертой степени длины волны и прямо пропорциональной квадрату амплитуды дипольного момента d_0.

Наконец, разберем пример вычисления поля излучателя с учетом запаздывания в системе. Рассмотрим систему, в которой плотность тока выражается формулой

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = j_0 \boldsymbol{k}_1 \sin\left(\frac{kL}{2} - \frac{k|x|}{2}\right)\delta(y)\,\delta(z)\, e^{i\omega t}. \tag{32,28}$$

Здесь $\boldsymbol{k}_1$ — единичный вектор вдоль оси z.

Формула (32,28) имеет простой смысл: в бесконечно тонкой линии длиной L, ориентированной вдоль оси z, возбужден ток, имеющий характер стоячей волны. На концах линии при $z = \pm\frac{L}{2}$ плотность тока обращается в нуль. Такая система называется линейным излучателем и часто применяется для излучения радиоволн.

Подставляя (32,28) в (32,18), получаем для вектора $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = j_0 \frac{\boldsymbol{k}_1}{cr} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{kL}{2} - \frac{k|x|}{2}\right) e^{-ikx\cos\theta} e^{i(\omega t - kr)},$$

где $\theta = \widehat{\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}_1}$.

Выполняя интегрирование, получаем

$$\boldsymbol{A} = \left\{\boldsymbol{k}_1 j_0 \frac{kL^2}{4}\, \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{cr}\right\} F(\theta, k), \tag{32.29}$$

где множитель $F(\theta, k)$ равен

$$F(\theta, k) = \frac{8}{k^2L^2} \frac{\cos\left(\frac{kL}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kL}{2}}{\sin^2\theta}. \tag{32,30}$$

Множитель в фигурных скобках отвечает излучению волн, длина которых $\lambda \gg \frac{L}{2}$ (бесконечно длинных волн) и для которых

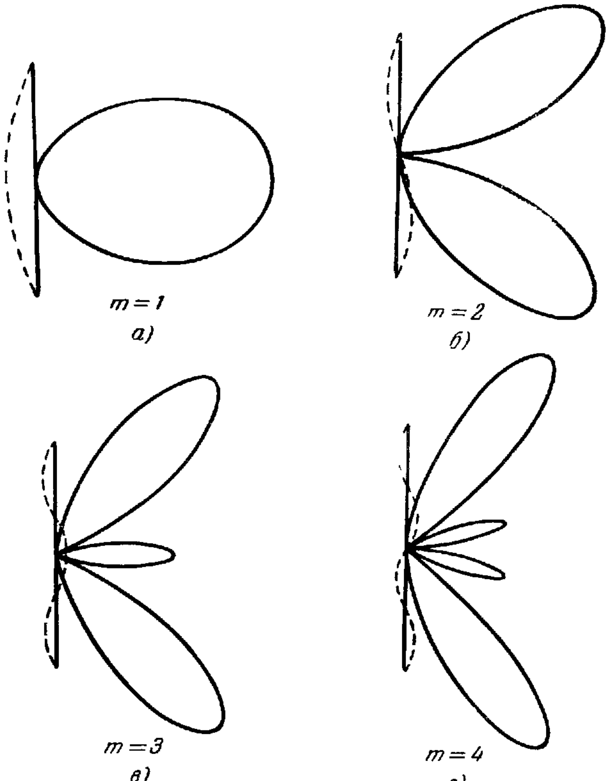

Рис. 8.

можно пренебречь собственным запаздыванием. Он получается непосредственно из (32,20) после подстановки формулы (32,26), в которой положено $\frac{kL}{2} \to 0$.

Множитель $F(\theta, k)$ характеризует собственное запаздывание в системе. При $\frac{kL}{2} \to 0$ он стремится к единице. При конечном значении kL он отвечает существенному изменению углового распределения излучения.

При $kL=\pi$ (т. е. $\lambda=\frac{L}{2}$) угловое распределение излучения сравнительно мало отличается от такового у простого диполя (рис. 8, *а*). При $kL=m\pi$, где m — целое число волн, укладывающихся на длине линейного излучателя, возникают распределения, приведенные на рис. 8, *б*, *в*, *г*.

С увеличением m числа лепестков в угловой диаграмме излучение увеличивается и они постепенно приближаются к оси излучателя. В пределе, при $m\to\infty$, излучение оказывается направленным вдоль оси излучателя.