ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 33. Распространение электромагнитных волн вдали от излучателя

В предыдущих параграфах было изучено явление излучения электромагнитных волн. Теперь мы можем разобрать механизм распространения электромагнитных волн в пространстве, свободном от зарядов (в вакууме).

Для получения более наглядных формул мы ограничимся случаем монохроматической волны. Мы видели в предыдущей главе, что излучающие системы излучают электромагнитные волны, у которых поверхностями равной фазы являются сферы радиуса r.

Перейдем теперь в формулах (32,24) и (32,25) к пределу, считая расстояние до системы зарядов настолько большим, чтобы можно было пренебречь различием в направлении векторов $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{r}_0$ — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения и $\boldsymbol{n}$ — по-прежнему единичный вектор, направленный от излучателя к точке наблюдения.

Тогда мы можем написать

$$r = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_0 \simeq \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}$$

и сделать эту замену в фазовом множителе, после чего формулы (32,24) и (32,25) приобретают вид

$$\boldsymbol{H} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{r}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\,e^{i\omega\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{c}\right)}, \tag{33,1}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{r}[[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\boldsymbol{n}]\,e^{i\omega\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{c}\right)}. \tag{33,2}$$

В формулах (33,1) и (33,2) расстояние от точки наблюдения до начала координат входит в виде множителя $1/r$ в амплитуде. Ясно, однако, что на бесконечно большом расстоянии от начала координат изменение функции $1/r$ можно считать происходящим весьма медленно и положить $\frac{1}{r} \approx \mathrm{const}$. Изменение полей с расстоянием определяется при этом исключительно фазовым множителем. Тогда (33,1) и (33,2) можно представить в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r\boldsymbol{n}}{c}\right)}, \qquad (33,3)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r\boldsymbol{n}}{c}\right)}, \qquad (33,4)$$

где $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ — постоянные в пространстве и во времени величины.

Введем вектор $\boldsymbol{k} = \frac{\omega\boldsymbol{n}}{c}$, именуемый волновым вектором. По абсолютной величине $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны, и ориентирован по направлению распространения электромагнитной волны. Тогда

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \qquad (33,5)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}. \qquad (33,6)$$

В формулах (33,5) и (33,6) подразумевается, что в окончательных выражениях следует брать вещественную часть. Согласно (27,3) амплитуды $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ направлены перпендикулярно друг к другу и к вектору $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{E}_0 = [\boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{n}]. \qquad (33,7)$$

Векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ представляют плоские монохроматические волны: плоскости $\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} = \mathrm{const}$ являются поверхностями равной фазы (равных значений напряженностей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$).

Мы приходим, таким образом, к естественному результату. На достаточно больших расстояниях от излучателя сферические волны превращаются в плоские. Это наглядно можно представить следующим образом: если излучающая система находится достаточно далеко, радиус кривизны сферической поверхности равной фазы электромагнитной волны весьма велик по сравнению с размерами той области пространства, в которой рассматривается поле. Поэтому в пределах этой области сферу с достаточной степенью точности можно считать плоской поверхностью.

Если выбрать направление распространения за ось x, то формулы (33,5) и (33,6) можно представить в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \qquad (33,8)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}. \qquad (33,9)$$

Формулы (33,7)—(33,9) описывают плоские волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x со скоростью

$$v=\frac{\omega}{k}=c. \tag{33,10}$$

Действительно, в момент времени $(t+1)$ фазовый множитель имеет в точке $(x+c)$ то же значение, что он имел в момент t в точке x. Таким образом, v представляет скорость распространения поверхности равной фазы и по этой причине называется фазовой скоростью.

Распространение плоских волн, в отличие от сферических волн, не сопровождается уменьшением их амплитуды.

Вычислим вектор Пойнтинга в плоской волне:

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]=\frac{c}{4\pi}[[\boldsymbol{Hn}]\boldsymbol{H}]=\boldsymbol{n}\frac{cH^2}{4\pi}=\boldsymbol{n}c\frac{E^2+H^2}{8\pi}=\boldsymbol{n}cu_0. \tag{33,11}$$

В плоской волне он оказывается постоянным и равным потоку энергии, движущемуся со скоростью света. Импульс плоской электромагнитной волны равен

$$\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{c^2}=\boldsymbol{n}\frac{u_0}{c}. \tag{33,12}$$

Найденные нами выражения для поля в плоской волне могут быть получены также и непосредственно из решения уравнений поля в области пространства, свободной от зарядов.

Поскольку плотность заряда и плотность тока в изучаемой части пространства равны нулю, уравнения для потенциалов электромагнитного поля приобретают следующий вид:

$$\Delta\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0,$$

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$

Для простоты рассмотрим сначала случай, когда потенциалы поля зависят только от одной координаты x, так что уравнения для потенциалов имеют вид

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(x,t)}{\partial t^2}=0, \tag{33,13}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \tag{33,14}$$

$$\frac{\partial A_x(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{33,15}$$

Будем, кроме того, считать, что поле зависит от времени по простому гармоническому закону. Тогда решения уравнений (33,13) — (33,15) будем искать в виде

$$\boldsymbol{A}(x, t) = \boldsymbol{A}_0(x) e^{i\omega t}, \tag{33,16}$$

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) e^{i\omega t}. \tag{33,17}$$

Для $\boldsymbol{A}_0$ и φ_0 подстановка (33,16) и (33,17) в (33,13) и (33,14) дает

$$\frac{d^2\boldsymbol{A}_0(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{A}_0 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi_0(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{l}e^{-ikx} + \boldsymbol{l}'e^{+ikx},$$

$$\varphi_0 = \alpha e^{-ikx} + \alpha' e^{+ikx},$$

где обозначено $k = \frac{\omega}{c}$ и $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}'$, α, α' — постоянные величины. Для потенциалов находим при этом

$$\boldsymbol{A}(x, t) = \boldsymbol{l}e^{i(\omega t - kx)} + \boldsymbol{l}'e^{i(\omega t + kx)}, \tag{33,18}$$

$$\varphi = \alpha e^{i(\omega t - kx)} + \alpha' e^{i(\omega t + kx)}. \tag{33,19}$$

Первое слагаемое в (33,18) и (33,19) представляет плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x, второе слагаемое — такую же волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x. Какая именно из этих волн фактически возбуждена, зависит от расположения излучающей системы. Не ограничивая общности, можно рассмотреть одну из этих волн, например первую.

Амплитуды $\boldsymbol{l}$ и α не являются произвольными, но связаны между собой условием Лоренца (33,15), которое после подстановки (33,18) и (33,19) дает

$$\alpha = l_x.$$

Тогда потенциалы поля окончательно запишутся в виде

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{l}e^{i(\omega t - kx)} = \boldsymbol{l}e^{i\psi}, \tag{33,20}$$

$$\varphi = l_x e^{i(\omega t - kx)} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{l}\boldsymbol{i})e^{i\psi}, \tag{33,21}$$

где $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор вдоль оси x и $\psi = \omega t - kx$.

Напряженности полей в плоской волне имеют вид

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\operatorname{grad}\psi =$$

$$= -\frac{\omega}{c}\dot{\boldsymbol{A}} - \dot{\varphi}\operatorname{grad}\psi = -k\dot{\boldsymbol{A}} + k\dot{\varphi}\boldsymbol{i} = k\{\boldsymbol{i}(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{i}) - \dot{\boldsymbol{A}}\} =$$

$$= k[[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{i}]\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{E}_0 e^{i\psi} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \tag{33,22}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = [\operatorname{grad}\psi, \dot{\boldsymbol{A}}] = k[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \tag{33,23}$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу ψ, а $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ — амплитуды напряженности полей по модулю, равные, очевидно, $|\boldsymbol{E}_0| = |\boldsymbol{H}_0| = k|\boldsymbol{l}|$. Векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны друг к другу.

Распишем выражения для полей в компонентах:

$$\left.\begin{aligned} &E_x = 0, && H_x = 0, \\ &E_y = -k\dot{A}_y = H_z, && H_y = k\dot{A}_z = -E_z, \\ &E_z = -k\dot{A}_z = -H_y; && H_z = -k\dot{A}_y = E_y. \end{aligned}\right\} \tag{33,24}$$

В этих формулах, как и выше, подразумевается вещественная часть написанных комплексных выражений для потенциалов и полей.

В общем случае, когда направление распространения волн не совпадает с осью x, единичный вектор $\boldsymbol{i}$ следует заменить на единичный вектор в направлении распространения $\boldsymbol{n}$, и соотношения (33,22) и (33,23) совпадают с (33,5) и (33,6). Величина амплитуды волн $|\boldsymbol{E}_0| = |\boldsymbol{H}_0|$ остается совершенно произвольной. Она связана с амплитудой волн, излучаемых излучателем.

Полезно сравнить полученные нами выражения с аналогичными формулами, полученными при другой калибровке потенциалов, которой часто пользуются в литературе[1]).

Как мы видели в § 11, потенциалы поля допускают преобразование калибровки (11,1) и (11,2). Произведем переход от φ к новому значению φ',

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

и выберем функцию $\psi = c\int \varphi\, dt$. Тогда $\varphi' = 0$, т. е. в рассматриваемом представлении поле описывается только вектором-потенциалом $\boldsymbol{A}'(x, t) = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\psi$. Такой выбор ψ возможен не всегда, а лишь в вакууме, когда $\rho = 0$ и уравнение для φ допускает нулевое решение.

---

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960, стр. 123.

Условие Лоренца запишется в виде

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0, \quad \text{т. е.} \quad A_x = 0.$$

Решение $A_x = \text{const} \neq 0$ не отличается от $A_x = 0$, поскольку оно приводит к тем же значениям напряженностей поля. Нетрудно видеть, что для компонент поля при такой калибровке мы снова получаем значения (33,24).

Если волновой процесс не имеет простого периодического характера, т. е. не описывается монохроматической волной, можно без труда получить решение уравнения для потенциалов φ и $\boldsymbol{A}$ в общем виде. Решение проводится аналогично тому, как это было сделано в § 23.

Вводя новые переменные,

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct,$$

сводим уравнения для потенциалов к виду

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0.$$

Решением уравнения для вектора-потенциала служит

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(ct - x) + \boldsymbol{A}'(ct + x),$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$ — произвольные функции аргументов $ct - x$ и $ct + x$ соответственно. Первое из них представляет общее выражение для плоской волны, распространяющейся со скоростью c в положительном направлении оси x. Второе — волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси x. Аналогичное выражение получается и для скалярного потенциала.

Условие Лоренца приводит к равенству

$$\varphi = A_x = \boldsymbol{A}i,$$

имеющему место при произвольном виде функций $\boldsymbol{A}$ и φ.

Наконец, следует заметить, что в вакууме можно получить волновые уравнения непосредственно для векторов поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Для этого следует взять ротор от уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H} = -\Delta \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

так что

$$\Delta \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Аналогичным образом можно получить волновое уравнение для $\boldsymbol{E}$.