Из формул (34,4) и (34,5) легко исключить фазу, написав

$$\frac{E_y}{E_1^2}+\frac{E_z}{E_2^2}=1. \tag{34.6}$$

Выражение (34,6) связывает между собой значения компонент вектора $\boldsymbol{E}$ в плоской волне. Очевидно, что в данной плоскости $x=\mathrm{const}$ вектор $\boldsymbol{E}$ вращается в плоскости (yz) так, что его конец описывает эллипс.

Формула (34,6) представляет уравнение этого эллипса. Если, в частности, амплитуды $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ равны по абсолютной величине, вектор $\boldsymbol{E}$ вращается по кругу.

Поскольку распространение электромагнитной волны происходит в направлении $\boldsymbol{n}$, можно наглядно представить себе изменение вектора $\boldsymbol{E}$ в пространстве и во времени, как движение конца вектора $\boldsymbol{E}$ по эллиптической (или круговой) спирали, навитой на линию $\boldsymbol{n}$. Шаг спирали равен длине волны $\lambda=\frac{2\pi}{k}$.

В силу формулы (33,24) для компонент напряженности магнитного поля можно написать выражения

$$H_y=-E_2\sin(\omega t-kx+\alpha), \tag{34,7}$$

$$H_z=E_1\cos(\omega t-kx+\alpha). \tag{34,8}$$

Волны, в которых векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ вращаются по эллипсу, называются эллиптически поляризованными, при вращении их по окружности — поляризованными по кругу.

Направление вращения вектора $\boldsymbol{E}$ определяется фазой. Если вращение происходит по часовой стрелке для наблюдения смотрящего по направлению распространения волны, то такая волна называется имеющей положительную спиральность ($\alpha=-\pi/2$).

Если один из векторов $\boldsymbol{E}_1$ или $\boldsymbol{E}_2$ равен нулю, изменение $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ происходит в взаимно перпендикулярных плоскостях. Такие волны называются поляризованными в плоскости. По историческим традициям, плоскостью поляризации называют плоскость, в которой колеблется вектор $\boldsymbol{H}$. Таким образом, например, волна, поляризованная в плоскости z, имеет отличную от нуля компоненту H_z, колеблющуюся в плоскости (xz) и равную ей по величине компоненту E_y, колеблющуюся в плоскости (xy).

§ 35. Интерференция и образование волновых пакетов

Рассмотренная выше монохроматическая плоская волна являлась лишь идеализацией реальных электромагнитных волн: с одной стороны, монохроматическая плоская волна, являющаяся процессом строго периодическим в пространстве и во времени, должна, очевидно, иметь бесконечно большую протяженность в пространстве и бесконечно большую длительность во времени; с другой стороны, не существует строго монохроматических излучателей. Как мы видели в § 30, эффект затухания проявляется в излучении частот, отличных от собственной частоты ω_0 (хотя и близких к ней). Поэтому для описания реальных волновых процессов необходимо рассмотреть результат наложения или интерференции различных плоских монохроматических волн.

Рассмотрим наложение бесконечного множества плоских монохроматических волн, частоты которых непрерывно изменяются в узком интервале $\omega_0 - \Delta\omega \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega$, где ω_0, именуемая несущей частотой, удовлетворяет условию $\omega_0 \gg \Delta\omega$.

Амплитуду всех волн будем считать постоянной. Для напряженности электрического (или магнитного) поля можем написать

$$\boldsymbol{E} = \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}\, d\omega = \boldsymbol{E}_0 \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i(\omega t - kx)}\, d\omega.$$

Для общности результатов, которые будут нужны нам в дальнейшем, мы будем считать, что волновое число k является некоторой функцией частоты ω, не обязательно сводящейся к соотношению $k = \frac{\omega}{c}$, справедливому для электромагнитных волн в вакууме. Полагая

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0), \quad k \approx k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) \equiv k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0),$$

находим

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} e^{i(\omega-\omega_0)\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]}\, d\omega =$$

$$= \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int\limits_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{iu\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]}\, du =$$

$$= 2\boldsymbol{E}_0 \frac{\sin \Delta\omega \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]}{t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}, \qquad (35,1)$$

где введенная переменная интегрирования $u = \omega - \omega_0$. Мы приходим в принципе к следующему результату: наложение спектра волн с частотами, лежащими в узком интервале $2\Delta\omega$ вокруг несущей частоты ω_0, приводит к появлению волны с частотой ω_0

и волновым числом k_0, но с модулированной амплитудой

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}_0 \frac{\sin \Delta\omega (x - v_g t)}{x - v_g t}, \tag{35,2}$$

$$v_g = \left(\frac{d\omega_0}{dk}\right). \tag{35,3}$$

Модулированная амплитуда имеет весьма резкий главный максимум (рис. 9, где дана зависимость A от $\frac{\Delta\omega}{2}(t - v_g x)$) в точке

$$x_m = v_g t,$$

где она равна

$$\boldsymbol{A}_{\text{макс}} = 2\Delta\omega \boldsymbol{E}_0.$$

По обе стороны от точки максимума величина модулированной амплитуды уменьшается и в точках, где

$$\Delta\omega(x - v_g t) = \pm\pi,$$

модулированная амплитуда обращается в нуль. Помимо главного максимума, у модулированной амплитуды имеется целый ряд побочных максимумов, в которых, однако, амплитуда весьма мала по сравнению с амплитудой в главном максимуме и высота которых быстро убывает с увеличением аргумента (см. рис. 9). Практически можно считать, что электромагнитное поле возбуждено только вблизи главного максимума, а в остальном пространстве наложение волн приводит к их полному взаимному погашению.

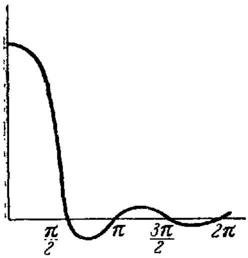

Рис. 9.

Возникающее образование в виде группы волн называется волновым пакетом. Волновой пакет движется в пространстве со скоростью v_g, сохраняя ограниченную протяженность в пространстве.

Поэтому величина v_g называется групповой скоростью движения пакета в отличие от фазовой скорости

$$v = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \lambda,$$

с которой перемещается в пространстве поверхность равной фазы. Очевидно, что энергия волнового пакета движется вместе с его амплитудой, т. е. со скоростью v.

Размеры волнового пакета ограничены интервалом переменных

$$\Delta\omega \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right] \approx 2\pi. \tag{35,4}$$

Для более наглядного выяснения смысла равенства (35,4) найдем пространственные размеры пакета. В фиксированный момент времени t поле отлично от нуля между точками x_1 и x_2, отстоящими друг от друга на расстоянии

$$x_1 - x_2 = \Delta x = \frac{2\pi}{\Delta\omega\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0} = \frac{2\pi}{\Delta k}; \qquad (35,5)$$

вне этой области поле имеет значение, близкое к нулю.

Если теперь фиксировать некоторую область $x = \text{const}$, то *длительность временно́го промежутка, в течение которого поле волнового пакета отлично от нуля*, равна

$$\Delta t \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \qquad (35,6)$$

По прошествии времени Δt поле в данном месте обратится в нуль.

Таким образом, волновой пакет обладает ограниченной пространственной и временно́й протяженностями, удовлетворяющими условиями:

$$\Delta t\, \Delta\omega \sim 2\pi; \quad \Delta x\, \Delta k \sim 2\pi. \qquad (35,7)$$

Теперь можно видоизменить постановку вопроса. Предположим, что мы *хотим получить волновое поле, отличное от нуля*, в некоторой области пространства Δx. Для получения такого поля из монохроматических волн необходимо образовать волновой пакет.

Если размеры пакета заданы нашим условием, то согласно (35,7) следует произвести суперпозицию монохроматических волн с волновыми числами, лежащими в интервале Δk. Чем у́же волновой пакет, т. е. чем меньше его пространственные размеры, тем больше Δk, т. е. тем больше интервал длин волн, которые должны участвовать в образовании пакета.

Совершенно аналогично можно образовать волновой пакет, существующий в некотором месте ограниченное время. Чем меньше требующаяся временна́я длительность пакета Δt, тем больше интервал частот $\Delta\omega$ тех монохроматических волн, которые должны его образовывать.

Соотношения, найденные для волн, распространяющихся в одном измерении (по оси x), могут быть без труда обобщены на случай волн, распространяющихся в произвольном направлении в пространстве. Тогда получаются соотношения

$$\Delta x\, \Delta k_x \sim 2\pi; \quad \Delta y\, \Delta k_y \sim 2\pi; \quad \Delta z\, \Delta k_z \sim 2\pi; \quad \Delta t\, \Delta\omega \sim 2\pi. \qquad (35,8)$$

Полученные результаты имеют большое принципиальное и практическое значение.

Совершенно однородная и бесконечно протяженная в пространстве и времени монохроматическая волна, как указывалось ранее, не может быть фактически реализована. Однако располагая излучателем с достаточно слабым затуханием, работающим достаточно длительное время, можно создать в пространстве волны, достаточно близкие по своим свойствам к монохроматическим. Ясно, что монохроматические волны, обладающие бесконечно большой протяженностью, не могут быть использованы для передачи каких-либо сигналов.

Под сигналами мы понимаем такие электромагнитные возмущения, которые в принципе можно регистрировать с помощью соответствующих устройств и которые могут служить для информации о некоторых физических событиях. Так, например, сигналом является самый факт излучения, начавшегося в некоторый момент времени. Обнаружение системы зарядов, рассеивающей электромагнитные волны, является другим примером сигнала.

Из сказанного ясно, что электромагнитные волны могут быть использованы для образования сигналов только в том случае, если из них сформированы волновые пакеты. Соотношения (35,8) используются для анализа требуемых свойств сигнала. Пусть, например, регистрирующее устройство требует для своей работы сигнала, длительность которого не меньше некоторой величины Δt. Тогда сигнал будет зарегистрирован только в том случае, если он представляет волновой пакет, сформированный из монохроматических волн с частотами, распределенными в интервале $\Delta\omega \geqslant \frac{2\pi}{\Delta t}$.

Мы не будем останавливаться на других примерах применения соотношений (35,8). Они будут играть важную роль в квантовой механике.

В заключение подчеркнем лишь, что полученное нами выражение для волнового пакета имеет приближенный характер. Оно справедливо, если:

1) амплитуды всех монохроматических волн, образующих пакет, имеют одно и то же значение;

2) в разложении $k(\omega)$ в ряд по $\Delta\omega$ можно ограничиться первым членом.

Первое ограничение не имеет принципиального значения, и не представляет особого труда нахождения волновых пакетов, образуемых волнами с различными амплитудами.

Второе требование для электромагнитных волн в вакууме выполняется автоматически: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega_0}{c} + \frac{\Delta\omega}{c} = k_0 + \frac{1}{c}\Delta\omega$. Однако, как мы увидим в квантовой механике, в тех случаях, когда требование 2) не выполняется, учет следующих членов разложения влечет за собой важные следствия: форма пакета, неизменная во времени и пространстве в первом приближении, при учете этих членов оказывается изменяющейся. Волновой пакет деформируется и постепенно расплывается.

§ 36. Рассеяние электромагнитных волн свободным и связанным зарядами

Рассеяние электромагнитных волн связанным зарядом может быть рассмотрено на примере линейного гармонического осциллятора. Пусть плоская монохроматическая волна, поляризованная в плоскости, падает на осциллятор. Уравнение движения осциллятора будет иметь такой вид:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\dddot{\boldsymbol{r}} + \frac{eE_0 e^{i\omega t}}{m}.$$

Считая затухание слабым, можем написать $\dddot{\boldsymbol{r}} \approx -\omega_0^2 \dot{\boldsymbol{r}}$, так что

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} + \gamma \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}, \qquad (36,1)$$

где γ, как и в § 30, равна $\frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$. Интересующим нас частным решением уравнения (36,1) служит

$$r = \frac{\frac{e}{m}E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \qquad (36,2)$$

Формула (36,2) дает закон движения осциллятора под действием внешней силы.

Для интенсивности излучения, рассеянного в телесном угле $d\Omega$, находим по формуле (27,8)

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\ddot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4\omega^4 E_0^2}{4\pi m^2 c^3}\frac{\sin^2\vartheta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\cos^2(\omega t - \delta)\, d\Omega. \qquad (36,3)$$

Рассеянное излучение имеет ту же частоту, что и падающее, но сдвинуто по фазе на величину

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

В формуле (36,3) через ϑ обозначен угол между направлением наблюдения $\boldsymbol{n}$ и направлением вектора поляризации $\boldsymbol{E}_0$