разложения влечет за собой важные следствия: форма пакета, неизменная во времени и пространстве в первом приближении, при учете этих членов оказывается изменяющейся. Волновой пакет деформируется и постепенно расплывается.

## § 36. Рассеяние электромагнитных волн свободным и связанным зарядами

Рассеяние электромагнитных волн связанным зарядом может быть рассмотрено на примере линейного гармонического осциллятора. Пусть плоская монохроматическая волна, поляризованная в плоскости, падает на осциллятор. Уравнение движения осциллятора будет иметь такой вид:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\dddot{\boldsymbol{r}} + \frac{eE_0 e^{i\omega t}}{m}.$$

Считая затухание слабым, можем написать $\dddot{\boldsymbol{r}} \approx -\omega_0^2 \dot{\boldsymbol{r}}$, так что

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} + \gamma \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e}{m} \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}, \tag{36,1}$$

где $\gamma$, как и в § 30, равна $\frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$. Интересующим нас частным решением уравнения (36,1) служит

$$r = \frac{\frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \tag{36,2}$$

Формула (36,2) дает закон движения осциллятора под действием внешней силы.

Для интенсивности излучения, рассеянного в телесном угле $d\Omega$, находим по формуле (27,8)

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\ddot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4\omega^4 E_0^2}{4\pi m^2 c^3}\frac{\sin^2\vartheta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\cos^2(\omega t - \delta)\, d\Omega. \tag{36,3}$$

Рассеянное излучение имеет ту же частоту, что и падающее, но сдвинуто по фазе на величину

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

В формуле (36,3) через $\vartheta$ обозначен угол между направлением наблюдения $\boldsymbol{n}$ и направлением вектора поляризации $\boldsymbol{E}_0$

(рис. 10). Введя падающую интенсивность $I_0 = \frac{cE_0^2}{4\pi}$ и усредняя за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, находим

$$\overline{dI} = \frac{1}{T}\int_0^T (dI)\,dt = r_0^2 I_0 \frac{\omega^4 \sin^2\vartheta\, d\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \tag{36,4}$$

Процесс рассеяния электромагнитных волн принято характеризовать дифференциальным эффективным сечением. По определению, дифференциальным эффективным сечением рассеяния в телесном угле $d\Omega$ называется отношение интенсивности, рассеянной в угол $d\Omega$, к интенсивности падающего излучения:

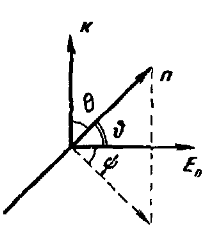

Рис. 10.

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{I_0}. \tag{36,5}$$

Из (37,4) находим для дифференциального эффективного сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{r_0^2\omega^4 \sin^2\vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\, d\Omega. \tag{36,6}$$

Как видно из формулы (36,5), дифференциальное сечение рассеяния имеет размерность *см*$^2$ (что и объясняет термин «сечение»). Формула (36,5) дает искомое сечение рассеяния света, поляризованного в плоскости. Угол $\vartheta$ и полярные углы $\theta$ и $\psi$ *связаны между собой* соотношением, которое легко установить из рис. 10. На этом рисунке полярная ось $z$ направлена по волновому вектору $\boldsymbol{k}$ падающей волны, а ось $x$ — вдоль ее вектора поляризации. Проектируя единичный вектор в направлении наблюдения $\boldsymbol{n}$ на ось $x$, находим

$$\cos\vartheta = \sin\theta\cos\psi$$

или

$$\sin^2\vartheta = 1 - \sin^2\theta\cos^2\psi. \tag{36,7}$$

На практике часто важно знать сечения рассеяния *неполяризованного* излучения. Для нахождения последнего необходимо усреднить эффективное сечение (36,5) по всем возможным поляризациям, т. е. по всем возможным ориентациям вектора $\boldsymbol{E}_0$ в плоскости $(xy)$. Это означает, что необходимо усреднить выражение (36,7) по всем возможным значениям азимутального угла $\psi$, т. е. положить

$$\overline{\sin^2\vartheta} = 1 - \sin^2\theta\,\overline{\cos^2\psi} = 1 - \frac{\sin^2\theta}{2} = \frac{1+\cos^2\theta}{2}.$$

Тогда получим

$$d\sigma=\frac{r_0^2\omega^4}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}\,\frac{1+\cos^2\theta}{2}\,d\Omega. \qquad (36,8)$$

Угловая зависимость в формуле (36,8) показывает, что в направлении падающего излучения ($\theta=0$) и в противоположном направлении ($\theta=\pi$) происходит самое сильное рассеяние.

Интегрируя (36,8) по всему телесному углу, получаем полное сечение рассеяния неполяризационного излучения

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\,\frac{r_0^2\omega^4}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}, \qquad (36,9)$$

Полученное выражение носит название дисперсионной формулы классической электродинамики.

Зависимость полного эффективного сечения от частоты выражается кривой, сходной с приведенной на рис. 7 с резко выраженным максимумом при $\omega\simeq\omega_0$, т. е. при резонансной частоте падающего излучения, близкой к собственной частоте осциллятора. Полагая в формуле (36,9) $\omega\simeq\omega_0$, получаем вблизи резонанса

$$\sigma\simeq\frac{2}{3}\,\frac{r_0^2\omega_0^2}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \qquad (36,10)$$

Величина $\gamma$ характеризует ширину области резонанса. В частности, в точном резонансе $\omega=\omega_0$. Сечение в максимуме равно

$$\sigma_{\max}=\frac{8\pi}{3}\,r_0^2\,\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}. \qquad (36,11)$$

Поскольку $\gamma\ll\omega_0$, эффективное сечение для резонансной частоты достигает очень больших значений. Это явление играет важную роль в оптике материальных сред. Оно называется резонансной флуоресценцией *).

Дисперсионная формула, полученная на примере рассеяния излучения гармоническим осциллятором, имеет в действительности весьма общий характер. Она по форме совпадает с соответствующей формулой для рассеяния света атомами, которая получается в квантовой механике (гл. V). В квантовой механике мы увидим, что область применимости дисперсионной формулы не ограничивается рассеянием света, но распространяется и на ряд других систем.

*) Сравнивая (36,10) с формулой (III, 4′), мы видим, что при $\gamma\to 0$ сечение ведет себя как $\delta$-функция.

Рассмотрим два соотношения, получающихся из (36,9) в предельном случае малых и больших частот. При малых частотах $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}, \tag{36,12}$$

т. е. сечение пропорционально четвертой степени частоты или обратно пропорционально четвертой степени длины волны падающего излучения.

Этот закон рассеяния имеет весьма общий характер. Он применим тогда, когда длина волны рассеиваемого света велика по сравнению с размерами рассеивающего объема. Этот случай часто называют релеевским рассеянием.

При высоких частотах $\omega \gg \omega_0$ формула (36,9) вновь упрощается:

$$\sigma \simeq \frac{8\pi r_0^2}{3} = \frac{8\pi e^4}{3m^2c^4}. \tag{36,13}$$

Это выражение получило название формулы Томсона.

Сечение оказывается постоянным, не зависящим ни от частоты рассеиваемого излучения, ни от свойств осциллятора. Последнее обстоятельство имеет простой смысл: при высоких частотах сила, действующая на заряд со стороны поля, весьма велика по сравнению с квазиупругой силой. Электрон рассеивает как свободная частица. Согласно формуле Томсона, сечение $\sigma$ является универсальной постоянной, определяемой классическим радиусом электрона. Ясно, что формула Томсона описывает рассеяние электронами любых систем, например, атомов, если можно пренебречь силами, связывающими электроны в атомах, и считать их свободными. Рассеянием излучения тяжелыми ядрами можно пренебречь, поскольку сечение обратно пропорционально квадрату массы рассеивателя. Универсальный характер формулы (36,13) делает ее одним из фундаментальных соотношений классической электродинамики. Она была подвергнута тщательной опытной проверке, результаты которой приведены на рис. 11.

Мы видим, что отношение $\frac{\sigma_{\text{эксп}}}{\sigma_{\text{томс}}} \sim 1$ лишь для длин волн, больших примерно 2 Å.

При меньших длинах волн классическое рассмотрение процессов рассеяния оказывается неприменимым. Мы сталкиваемся здесь с упомянутым в § 28 обстоятельством. Хотя предел применимости классической электродинамики, заключенный в самой теории, относится к масштабу длины волн $\lambda \sim r_0 \sim 10^{-5}$ Å, фактически он наступает уже при масштабах в $10^5$ раз больших.

Это связано, как мы уже подчеркивали, с проявлением квантовых эффектов. Ход сечения на рис. 11 в точности совпадает

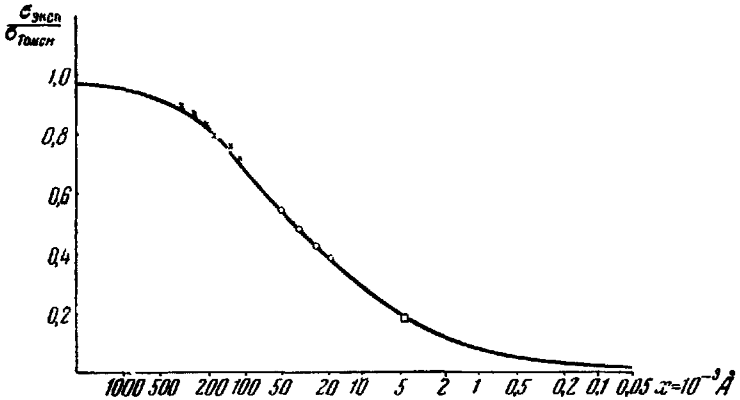


Рис. 11.

с предсказаниями квантовой теории излучения (ч. V, формула Клейна — Нишины).

## § 37. Поглощение излучения

Наряду с рассеянием излучение, взаимодействующее с веществом, испытывает поглощение. В классической электродинамике последний эффект может быть рассчитан для модели осциллятора. Мы ограничимся излучением частоты падающего излучения, близкой к резонансной, когда поглощение будет наибольшим. Однако при этом нельзя считать частоту излучения точно равной собственной частоте осциллятора — из дальнейшего видно, что в этом случае вычисление не привело бы к вполне определенному результату. Поэтому следует считать, что падающее излучение имеет некоторое непрерывное распределение по частотам.

Мы можем разложить падающее поле в интеграл Фурье, написав

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \boldsymbol{E}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Подставляя это в уравнение движения осциллятора (36,1) и разлагая в интеграл Фурье смещение последнего

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \boldsymbol{r}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$