§ 38*. Каноническая форма уравнений поля

При переходе к квантовой теории электромагнитного поля удобно придать уравнениям электромагнитного поля вид, весьма сходный с уравнениями механики. Именно, оказывается, что электромагнитному полю можно сопоставить некоторую механическую систему, а уравнениям Даламбера придать форму уравнений Гамильтона, описывающих движение этой механической системы. Мы ограничимся случаем электромагнитного поля в вакууме.

Воспользовавшись описанной в § 11 кулоновской калибровкой потенциалов, при которой $\varphi=0$, запишем уравнения поля в виде

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{38,1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{38,2}$$

Областью, в которой имеют место написанные уравнения поля, является пространство, свободное от зарядов и токов. На границе этой области должно быть задано граничное условие. Таким условием может служить, например, выражение для $\boldsymbol{A}$ в виде запаздывающего потенциала. Нас, однако, не будет интересовать амплитуда электромагнитных волн, и мы ограничимся рассмотрением поля в вакууме вдали от токов и зарядов. Разобьем всю область пространства, свободную от зарядов, на совокупность кубов (мы будем именовать их нормировочными) с ребром L и будем рассматривать поле внутри одного из кубов. Тогда граничное условие должно быть задано на поверхности нормировочного куба.

Как мы знаем, электромагнитное поле в вакууме представляет совокупность бегущих волн. Решение в виде бегущих волн получится, если принять, что вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ и его производные имеют равные значения на противоположных гранях куба. Это эквивалентно требованию: $\boldsymbol{A}$ является периодической функцией переменных x, y, z с периодом L:

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \boldsymbol{A}(x+L, y+L, z+L). \tag{38,3}$$

Получив решение уравнений (38,1) и (38,2) с граничным условием (38,3) в нормировочном кубе с ребром L, мы можем написать решение во всем пространстве простым повторением решения в исходном нормировочном кубе. Окончательные результаты не будут зависеть от выбора L.

Будем пытаться искать решение (38,1) и (38,2) в нормировочном кубе в виде совокупности выражений вида $q_i(t)\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{r})$, где $q_i(t)$ зависит только от времени, $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{r})$ — от координат.

При соответствующем выборе векторных функций $A_i(r)$ каждая из них представляет волну в нормировочном кубе. Поскольку объем последнего является конечным, в нем может укладываться счетное множество стоячих или бегущих волн. Итак, положим

$$A(r, t) = \sum_i q_i(t)\, A_i(r), \tag{38,4}$$

где индекс i пробегает бесконечное, но дискретное число значений. Это означает, что вектор-потенциал поля в нормировочном кубе можно разложить в ряд Фурье. Число членов в сумме (38,4), т. е. число волн в нормировочном кубе, бесконечно велико.

Подставляя (38,4) в (38,1), находим

$$\sum_i \left(q_i(t)\, \Delta A_i(r) - \frac{1}{c^2}\ddot{q}_i(t)\, A(r)\right) = 0. \tag{38,5}$$

Поскольку все волны, образующие суперпозицию (38,4), являются независимыми, равенство (38,5) должно иметь место для каждой из волн, т. е.

$$q_i(t)\, \Delta A_i(r) - \frac{1}{c^2}\ddot{q}_i(t)\, A_i(r) = 0. \tag{38,6}$$

Перепишем (38,6) в виде

$$\frac{c^2\Delta\,(A_i(r))_k}{(A_i(r))_k} = \frac{\ddot{q}_i(t)}{q_i(t)}, \quad k = x,\ y,\ z. \tag{38,7}$$

Поскольку $(A_i(r))_k$ и $q_i(t)$ являются функциями разных переменных, равенство (38,7) может иметь место только, если правая и левая его стороны порознь равны некоторой постоянной, именуемой постоянной разделения. По причинам, ясным из дальнейшего, эта постоянная должна быть существенно положительной величиной. Обозначив ее через $(-\omega_i^2)$, находим

$$\Delta A_i(r) + \frac{\omega_i^2}{c^2} A_i(r) = 0, \tag{38,8}$$

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0. \tag{38,9}$$

Решениями уравнения (38,8), удовлетворяющими условиям периодичности (38,3), служат выражения типа

$$\left.\begin{aligned} A_i &\sim e_i \sin k_i r, \\ A_i &\sim e_i \cos k_i r. \end{aligned}\right\} \tag{38,10}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{k}_l$ должны принимать дискретный ряд значений

$$k_{lx} = \frac{2\pi n_1}{L}, \quad k_{ly} = \frac{2\pi n_2}{L}, \quad k_{lz} = \frac{2\pi n_3}{L}, \tag{38,11}$$

где n_1, n_2 и n_3 — положительные целые числа. Совокупность таких значений компонент $\boldsymbol{k}_l$ обеспечивает наличие узлов или пучностей на гранях нормировочного куба. Абсолютная величина вектора $\boldsymbol{k}$ равна, по определению, $|\boldsymbol{k}_l| = \frac{\omega_l}{c}$. Вектор $\boldsymbol{e}_j$ — единичный вектор поляризации, могущий принимать при данном $\boldsymbol{k}_l$ два значения $(j = 1, 2)$.

Вместо синусов и косинусов в формуле (38,10) мы могли бы взять их произвольную линейную комбинацию.

Уравнение (38,2) приводит к требованию

$$(\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{k}_l) = 0, \tag{38,12}$$

означающему (см. § 33) поперечность волн.

Совокупность функций $\boldsymbol{A}_l$ является полностью заданной уравнениями (38,1) и (38,2) и граничным условием (38,3). Она является одинаковой для любых полей в нормировочном кубе.

Для фактического определения вектора-потенциала в данной точке пространства в определенный момент времени необходимо задать совокупность всех временных амплитуд $q_l(t)$. Это значит, что состояние поля характеризуется заданием бесконечного набора амплитуд $q_l(t)$.

Последние определяются уравнением (38,9), которое совпадает с уравнением движения линейного гармонического осциллятора. Величина ω_l представляет частоту колебаний этого осциллятора. Значение $q_l(t)$ определяет состояние l-го осциллятора в любой момент времени t. Задание совокупности переменных амплитуд $q_l(t)$ равносильно заданию состояния совокупности бесконечно большого числа осцилляторов с частотами ω_l. Если известно состояние всех осцилляторов в данный момент времени t, то известно и поле в этот момент. Таким образом, электромагнитное поле может быть формально заменено механической системой с бесконечно большим числом степеней свободы — набором бесконечно большого числа осцилляторов, именуемых обычно осцилляторами поля. Совокупность состояний осцилляторов поля $q_l(t)$ характеризует состояние этой механической системы и, вместе с тем, состояние поля.

Величины $q_l(t)$ можно рассматривать как совокупность координат механической системы, уравнения движения которой можно представить в виде уравнений Гамильтона. Этой системе следует приписать функцию Гамильтона (совпадающую с ее энергией)

$$H=\frac{1}{2}\sum(p_i^2+\omega_i^2 q_i^2), \tag{38,13}$$

где p_i — импульс, сопряженный координате q_i. Масса всех осцилляторов поля принята равной единице.

Действительно, уравнения Гамильтона для i-й степени свободы (i-го осциллятора) гласят:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=p_i, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\omega_i^2 q_i,$$

откуда непосредственно следует уравнение (38,9) для величины q_i.

Частное решение уравнений поля (38,1) и (38,2) можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}_{ij}\sim C_{1i}\boldsymbol{e}_j\cos\omega_i t\sin\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}+C_{2i}\boldsymbol{e}_j\sin\omega_i t\cos\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}. \tag{38,14}$$

Если должным образом подобрать нормировку линейной комбинации решений типа (38,14), из которых образуется общее решение (38,4) уравнений поля (38,1) и (38,2), можно добиться совпадения энергии поля в нормировочном кубе с энергией системы осцилляторов поля (38,13). При такой нормировке вектора-потенциала мы можем считать, что система осцилляторов поля полностью эквивалентна электромагнитному полю. Состояние набора осцилляторов однозначно связано с состоянием поля.

Требующаяся линейная комбинация решений типа (38,14) имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{A}=\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_{j=1}^{2}\boldsymbol{e}_j\frac{1}{k_i}(-\dot{q}_i(t)\sin\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}+\omega_i q_i\cos\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r})=$$

$$=\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_{j=1}^{2}\boldsymbol{e}_j\frac{1}{k_i}(-p_i\sin\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}+\omega_i q_i\cos\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}). \tag{38,15}$$

Действительно, убедимся в том, что энергия поля в нормировочном объеме удовлетворяет требованию

$$E=\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j=1}^{2}(p_i^2+\omega_i^2 q_i^2). \tag{38,16}$$

При этом осцилляторы с разными поляризациями считаются различными. Полное число осцилляторов поля получается суммированием по k и по j. Последнее сводится к удвоению результата.

Из (38,15) следует

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_{j=1}^{2} e_j\frac{1}{k_i}(-\ddot{q}_i\sin k_i r + \omega_i\dot{q}_i\cos k_i r) =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_j e_j\frac{1}{ck_i}(\omega_i^2 q_i\sin k_i r + \omega_i p_i\cos k_i r) =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_j e_j(\omega_i q_i\sin k_i r + p_i\cos k_i r) = \sum_i E_i; \quad (38,17)$$

$$H = \operatorname{rot} A = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{k_i}\{-\dot{q}_i\operatorname{rot}(e_j\sin k_i r) + \omega_i q_i\operatorname{rot}(e_j\cos k_i r)\} =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_j\frac{1}{k_i}\{p_i[k_i e_j]\cos k_i r + \omega_i q_i[k_i e_j]\sin k_i r\} =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i\sum_{j=1}^{2}\frac{[k_i e_j]}{k_i}\{p_i\cos k_i r + \omega_i q_i\sin k_i r\} = \sum_i\frac{[k_i E_i]}{k_i}. \quad (38,18)$$

Составим выражение для интегралов $\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV$ и $\frac{1}{8\pi}\int H^2\,dV$. Из (38,17) следует

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV = \frac{1}{2L^3}\int\left\{\sum_i\sum_j e_j(\omega_i q_i\sin k_i r + p_i\cos k_i r)\right\}^2 dV.$$

При вычислении интегралов воспользуемся очевидными соотношениями:

$$\int\sin(k_i r)\sin(k_{i'}r)\,dV = \int\sin(k_i r)\cos(k_{i'}r)\,dV =$$

$$= \int\cos(k_i r)\cos(k_{i'}r)\,dV = \int\sin(k_i r)\cos(k_i r)\,dV = 0$$

$$\int\sin^2 k_i r\,dV = \int\cos^2 k_i r\,dV = \frac{V}{2} = \frac{L^3}{2}.$$

Поэтому легко получить выражение

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV = \frac{1}{4}\sum_i\sum_j(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2).$$

Совершенно аналогично из (38,18) получается

$$\frac{1}{8\pi}\int H^2\,dV =$$

$$= \frac{1}{2L^3}\left\{\sum_i \sum_j e_j \frac{1}{k_i}\left(p_i\,[k_i e_j]\cos k_i r + \omega_i q_i\,[k_i e_j]\sin k_i r\right)\right\}^2 dV =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_i \sum_j \left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right).$$

Складывая найденные выражения, приходим к равенству (38,16).

При выбранной нами нормировке потенциала — подборе множителей перед $\sin k_i r$ и $\cos k_i r$, — полю в нормировочном объеме можно сопоставить набор осцилляторов поля, энергия которого совпадает с энергией поля. Состояние осцилляторов — набор величин $q_i(t)$ в момент времени t — определяет значение вектора-потенциала $A(r, t)$.

Таким образом, электромагнитному полю в конечном объеме формально эквивалентна механическая система с бесконечно большим, но счетным числом степеней свободы — набор осцилляторов поля, а уравнениям поля — гамильтоновы уравнения движения осцилляторов поля. Часто функцию Гамильтона эквивалентной системы осцилляторов именуют просто гамильтоновой функцией поля, а разложение вектора-потенциала (38,15) — разложением поля на осцилляторы. Необходимо подчеркнуть, что в рамках классической электродинамики разложение поля на осцилляторы имеет характер вычислительного приема. Осцилляторы поля нельзя связать с колебаниями каких-либо частиц, имеющих реальный характер. Однако это разложение играет важнейшую роль в квантовой теории электромагнитного поля (см. ч. V).

В квантовой теории электромагнитного поля разложение (38,15) часто выражают через экспоненциальные функции. В дальнейшем, в ч. V нам понадобится такое представление. Запишем выражение для вектора-потенциала $A(r, t)$ в виде

$$A(r, t) = \sum_\lambda \left(b_\lambda A_\lambda + b_\lambda^* A_\lambda^*\right). \tag{38,19}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_\lambda = e_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\, e^{ik_\lambda r},$$

$$A_\lambda^* = e_\lambda \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\, e^{-ik_\lambda r}.$$

Индекс λ, по которому производится суммирование в (38,19), заменяет индексы i и j в (38,15), т. е. он пробегает двойной (по сравнению с i) ряд значений, отвечающий обоим направлениям вектора поляризации ($\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$). Слагаемое $b_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda$ характеризует волну, распространяющуюся (бегущую) в положительном направлении вектора $\boldsymbol{k}_\lambda$. Второе слагаемое $b_\lambda^* \boldsymbol{A}_\lambda^*$ представляет волну, распространяющуюся в противоположном направлении $(-\boldsymbol{k}_\lambda)$. Таким образом, волны, имеющие волновые векторы $(\boldsymbol{k}_\lambda)$ и $(-\boldsymbol{k}_\lambda)$, считаются разными волнами. Компоненты векторов $(\boldsymbol{k}_\lambda)$ и $(-\boldsymbol{k}_\lambda)$ принимают значения, даваемые (38,11), но с положительными и отрицательными значениями целых чисел n_1, n_2, n_3 Это означает, что одной стоячей волне отвечают две бегущие — в положительном и отрицательном направлениях.

Подставляя $\boldsymbol{A}_\lambda$ и $\boldsymbol{A}_\lambda^*$ в (38,19), перепишем эту формулу в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda \left(b_\lambda e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}} + b_\lambda^* e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}}\right).$$

Сравнивая последнее выражение с (38,15) и приравнивая коэффициенты при $e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}}$ и $e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}}$, находим

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda &= \frac{1}{2\omega_\lambda}(ip_\lambda + \omega_\lambda q_\lambda), \\ b_\lambda^* &= \frac{1}{2\omega_\lambda}(-ip_\lambda + \omega_\lambda q_\lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (38,20)$$

В этих обозначениях энергия поля запишется в виде

$$E = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) = \frac{1}{2}\sum_\lambda (p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2) = 2\sum_\lambda b_\lambda b_\lambda^* \omega_\lambda^2. \qquad (38,21)$$

Для дальнейшего нам понадобится еще вычислить число осцилляторов поля с данной частотой и данной поляризацией Оно равно, очевидно, числу бегущих волн в объеме $V = L^3$. Для нахождения числа осцилляторов удобно воспользоваться простым геометрическим построением. Выберем n_1, n_2 и n_3 в формуле (38,11) за координатные оси в воображаемом пространстве чисел (n_1, n_2, n_3).

На рис. 12 изображена часть этого пространства. Каждому возможному значению n_1 и n_2 на этом рисунке отвечает точка. Введем величину

$$n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}.$$

Если числа n_1 n_2, n_3 достаточно велики, то изображающие их точки лежат весьма близко друг к другу и заполняют все пространство почти непрерывным образом. Величина n, как функция n_1, n_2, n_3, будет изменяться почти непрерывно и на рис. 12 изобразится радиусом-вектором.

Поскольку каждой тройке чисел n_1, n_2, n_3 отвечает определенное значение k, равное

$$k = |\boldsymbol{k}| = \frac{2\pi}{L}\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2} = n\frac{2\pi}{L},$$

число волн с k, лежащим в интервале между k и $k+dk$, равно числу чисел n, лежащих в интервале между n, $n+dn$. Последнее

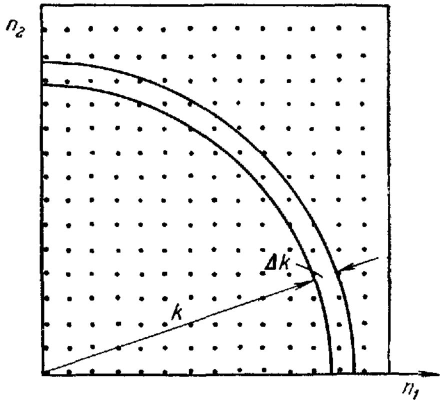

Рис. 12.

равно числу изобразительных точек, попадающих в шаровой слой, лежащий между шаровыми поверхностями с радиусами n, $n+dn$. Для этого числа имеем, очевидно, значение

$$g(n)\,dn = 4\pi n^2\,dn.$$

Таким образом, искомое число бегущих волн или число осцилляторов поля с $|\boldsymbol{k}|$, лежащим в интервале k, $k+dk$, и данной поляризацией в объеме $V = L^3$, равно

$$g(k)\,dk = 4\pi n^2\,dn = \frac{4\pi k^2\,dk}{(2\pi)^3}L^3.$$

Число осцилляторов с частотой, лежащей в интервале ω, $\omega+d\omega$, и данной поляризацией

$$g(\omega)\,d\omega = \frac{4\pi\omega^2\,d\omega}{(2\pi c)^3}L^3. \qquad (38,22)$$

Иногда приходится пользоваться формулой для числа осцилляторов поля с данной частотой, данной поляризацией и направлением вектора $\boldsymbol{k}$, лежащим в телесном угле $d\Omega$. Число таких осцилляторов равно

$$g(\omega)\,d\omega\,d\Omega = \frac{\omega^2\,d\omega L^3\,d\Omega}{(2\pi c)^3}. \tag{38,23}$$

Нам понадобится выражение для импульса излучения в объеме L^3. Написав его на основании (13,11), (38,17) и (38,18) в виде

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{EH}]\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int\left[\sum_\lambda \boldsymbol{E}_\lambda, \sum_\mu \frac{[\boldsymbol{k}_\mu \boldsymbol{E}_\mu]}{k_\mu}\right] dV =$$
$$= \frac{1}{4\pi c}\sum_\lambda \frac{\boldsymbol{k}_\lambda}{k_\lambda}\int E_\lambda^2\,dV = \int\sum \frac{\boldsymbol{k}_\lambda E_\lambda^2}{4\pi c k_\lambda}\,dV = \sum \boldsymbol{g}_\lambda,$$

мы можем, кроме энергии

$$\varepsilon_\lambda = 2b_\lambda b_\lambda^* \omega_\lambda^2 = p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda, \tag{38,24}$$

приписать каждому осциллятору импульс

$$\boldsymbol{p}_\lambda = \frac{\boldsymbol{k}_\lambda \varepsilon_\lambda}{c k_\lambda}, \tag{38.25}$$

так что

$$E = \sum \varepsilon_\lambda, \quad \boldsymbol{G} = \sum \boldsymbol{p}_\lambda.$$