ГЛАВА VII

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ 39. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Одним из важных с практической точки зрения разделов электродинамики является теория движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях Теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях является основой всей электроники, техники ускорителей, электронной и протонной микроскопии, масс-спектрографии, исследований реакций в плазме и опытных установок для изучения термоядерных явлений. Она весьма важна для целого ряда других областей физики — астрофизики, физики космических лучей и т. п.

В рамках этой книги мы ограничимся рассмотрением простейших задач. Мы будем предполагать, что поле, в котором находится некоторая частица, имеет напряженность, весьма большую по сравнению с полем самой частицы. Иными словами, мы считаем частицу, движением которой интересуемся, пробной частицей, не искажающей заданное, внешнее по отношению к ней поле.

Мы начнем с движения заряженной частицы в однородном постоянном во времени электрическом поле. Уравнения движения имеют вид

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E}.$$

Если в начальный момент времени $t=0$ заряженная частица была неподвижна, то, ориентируя ось x по полю, имеем

$$m\ddot{x} = eE,$$

$$m\ddot{y} = 0,$$

откуда

$$v \equiv \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2e}{m}V + v_0^2} = \pm\sqrt{\frac{2eV}{m}}, \qquad (39{,}1)$$

где $V = (\varphi_2 - \varphi_1)$ — ускоряющая (или замедляющая) разность потенциалов, пройденная зарядом. При этом положено $v_0 = 0$.

Если частица в начальный момент имела скорость v_0, направленную под углом θ к оси y, и находилась в начале координат, то двукратное интегрирование уравнений движения дает

$$\dot{x} = \frac{e}{m}Et + v_0 \sin\theta,$$

$$x = \frac{et^2E}{2m} + (v_0 \sin\theta)\,t,$$

$$\dot{y} = v_0 \cos\theta,$$

$$y = (v_0 \cos\theta)\,t.$$

Исключая t из написанных выражений для y и x, находим уравнение траектории

$$x = (\operatorname{tg}\theta)\,y + \frac{eEy^2}{2m(v_0\cos\theta)^2}. \tag{39,2}$$

Как и следовало ожидать, частица движется по параболе. Поперечное (по отношению к начальной скорости) электрическое поле обладает важным свойством фокусирования. Если пучок частиц выходит из начала координат под различными углами, близкими к 45°, то простой расчет показывает, что в некоторый момент времени $t = t_{\text{макс}}$ все частицы собираются в точке, находящейся на расстоянии $y_{\text{макс}}$. Здесь $y_{\text{макс}}$ — наибольшее расстояние вдоль оси y, проходимое частицей (отвечающее наибольшей высоте подъема при аналогичном движении в поле тяжести), $t_{\text{макс}}$ — время, требующееся для достижения этой точки.

В однородном электрическом поле фокусируются заряды с одинаковыми отношениями $\frac{e}{m}$ и начальными скоростями v_0, вылетающие под углом $\sim 45°$ к вектору поля.

Рассмотрим теперь движение частицы в однородном постоянном магнитном поле. Ориентируем ось z по направлению поля. Уравнения движения имеют вид

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}], \tag{39,3}$$

или, в проекциях,

$$\ddot{x} = \frac{e}{mc}\dot{y}H, \tag{39,4}$$

$$\ddot{y} = -\frac{e}{mc}\dot{x}H, \tag{39,5}$$

$$\ddot{z} = 0. \tag{39,6}$$

Уравнение (39,6) означает, что магнитное поле, направленное вдоль оси z, не влияет на движение частицы в этом направлении. Будем искать решение уравнений (39,4) и (39,5) в виде

$$\dot{x} = A\cos(\omega_C t + \alpha),$$
$$\dot{y} = B\sin(\omega_C t + \alpha).$$

Тогда имеем

$$-\omega_C A = \frac{eH}{mc} B,$$
$$-\frac{eH}{mc} A = \omega_C B.$$

Отсюда находим

$$\omega_C = \frac{eH}{mc}, \quad A = -B. \tag{39,7}$$

Таким образом, можем написать

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A\cos(\omega_C t + \alpha) = A\cos\left(\frac{eH}{mc}t + \alpha\right), \\ \dot{y} &= -A\sin(\omega_C t + \alpha) = -A\sin\left(\frac{eH}{mc}t + \alpha\right). \end{aligned}\right\} \tag{39,8}$$

Очевидно, что

$$A^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^{(0)^2},$$

где $v_\perp^0$ — начальная скорость в плоскости (xy).

Интегрируя еще раз полученные выражения, имеем

$$x = x_0 + \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C}\sin(\omega_C t + \alpha),$$
$$y = y_0 + \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C}\cos(\omega_C t + \alpha).$$

Исключая из последних соотношений время, находим, что частица движется по окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_\perp^{(0)^2}}{\omega_C^2} = R_C^2.$$

Частота обращения частицы, определяемая формулой (39,7), носит название циклотронной частоты. Циклотронная частота, равная удвоенной ларморовой, не зависит от начальной скорости частицы и определяется отношением $\frac{e}{m}$. Радиус окружности

$$R_C = \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C} = \frac{mcv_\perp^{(0)}}{eH} \tag{39,9}$$

имеет простой смысл: на окружности радиуса R_L уравниваются центробежная сила и сила Лоренца,

$$\frac{m\left(v_\perp^{(0)}\right)^2}{R_C} = \frac{e}{c} v_\perp^{(0)} H.$$

Если частица в начальный момент помимо скорости в плоскости (xy) имела по оси z компоненту скорости $v_z^{(0)}$, то она будет совершать равномерное движение вдоль направления магнитного поля. Наложение обоих движений, равномерного по оси z и вращения в плоскости (xy), приводит к траектории частицы в продольном поле в виде винтовой линии. Витки траектории навиваются на цилиндр радиуса R_C с осью, параллельной оси z.

При движении в постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}$ имеют место следующие законы сохранения:

1. Сохраняется полная энергия частицы

$$\varepsilon = \frac{m}{2}\left\{\left(v_\perp^{(0)}\right)^2 + \left(v_z^{(0)}\right)^2\right\} = \text{const}.$$

2. Сохраняется проекция момента импульса на ось z, т. е.

$$L_z = mR_C^2\dot{\varphi} = mR_C^2\omega_C = \text{const}.$$

Из формулы (22,4) следует, что сохраняется также магнитный момент, создаваемый частицей, движущейся по окружности:

$$\mu = \frac{e}{2mc} L_z = \frac{eR_C^2\omega_C}{2c} = \frac{\left(mv_\perp^2\right)}{2}\frac{1}{H} = \frac{\varepsilon_\perp}{H} = \text{const}, \qquad (39,10)$$

где $\varepsilon_\perp = \frac{mv_\perp^2}{2}$ — кинетическая энергия движения в плоскости (xy). Этим важным результатом мы воспользуемся в следующем параграфе.

Постоянное и однородное магнитное, как и постоянное однородное электрическое, поле обладает свойством фокусировки. Пусть из некоторой точки выходит пучок частиц в различных направлениях и с различными начальными скоростями, лежащими в плоскости (xy). Поскольку циклотронная частота не зависит от начальной скорости, по прошествии промежутка времени $T_C = \frac{2\pi}{\omega_C}$ частицы, совершив один оборот, вновь соберутся в одной точке.

Если теперь рассмотреть пучок частиц, имеющих одинаковые значения начальной скорости $|v^{(0)}|$, но вылетающих в различных направлениях, то можно заметить следующее: за время

T_C все они пройдут один виток винтовой линии. Шаг ее, равный $l = v_z^{(0)}T_C = v^{(0)}\cos\alpha T_C$, будет различным. Здесь α — угол между направлением начальной скорости и осью z. Поэтому частицы, выходящие из начальной точки, не собираются вновь в одной точке. Если, однако, угол α мал, так что $\cos\alpha \approx 1$, то шаг винтовой линии у всех частиц оказывается одинаковым и пучок фокусируется. В отличие от фокусировки электрическим полем, магнитное поле фокусирует только частицы, летящие под малыми углами к полю.

Рассмотрим, наконец, общий случай движения частицы в однородных и постоянных во времени электрическом и магнитном полях. Напишем уравнение движения в общем случае в виде

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{vH}].$$

Введем новую неизвестную величину $\boldsymbol{V}$, определяемую соотношением

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \frac{c[\boldsymbol{EH}]}{H^2}. \tag{39,11}$$

Подставляя $\boldsymbol{V}$ в уравнение движения, находим

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{e}{m}\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{VH}] + \frac{[[\boldsymbol{EH}]\boldsymbol{H}]}{H^2}\right\}.$$

Раскрывая векторное произведение

$$[[\boldsymbol{EH}]\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{HE}) - \boldsymbol{E}H^2,$$

получаем

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{e}{m}\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{HE})}{H^2} + \frac{e}{mc}[\boldsymbol{VH}]. \tag{39,12}$$

Если электрическое поле перпендикулярно к магнитному, так что $\boldsymbol{HE} = 0$, то

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{VH}].$$

Последнее уравнение совпадает с (39,3). Следовательно, $\boldsymbol{V}$ представляет скорость движения частицы по окружности в плоскости, перпендикулярной к магнитому полю $\boldsymbol{H}$, которое происходит с циклотронной частотой. Проекции скорости $\boldsymbol{V}$ даются формулами, аналогичными (39,8), в которых мы положим $\alpha = 0$.

При этом полная скорость частицы равна

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + c\frac{[\boldsymbol{EH}]}{H^2},$$

или, в проекциях,

$$v_x = V_x + \frac{cE_y}{H} = v_\perp^{(0)} \cos \omega_C t + \frac{cE_y}{H}, \tag{39,13}$$

$$v_y = V_y = -v_\perp^{(0)} \sin \omega_C t, \tag{39,14}$$

где $v_\perp^{(0)}$ — начальное значение скорости в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Постоянной α,

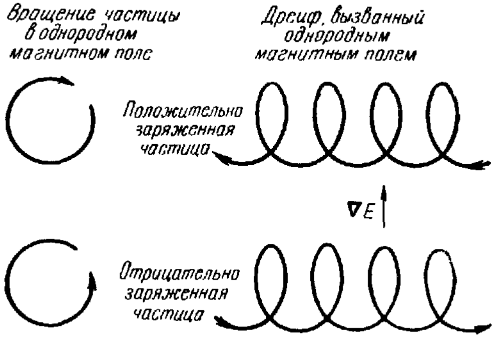

Рис. 13.

равной нулю, отвечает начальная скорость частицы, направленная по оси x. Из (39,13) следует, что v_x остается малой по сравнению со скоростью света c, если имеет место неравенство $E_y \ll H$.

Слагающая скорости частицы

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{c\,[\boldsymbol{EH}]}{H^2} \tag{39,15}$$

направлена перпендикулярно к обоим полям. По абсолютной величине она равна

$$|\boldsymbol{v}_D| = \frac{cE}{H} \tag{39,16}$$

и не зависит ни от заряда, ни от массы частицы.

Движение частицы в направлении $\boldsymbol{v}_D$ получило название дрейфа.

Наглядное истолкование явления дрейфа может быть получено из следующего рассуждения. Пусть положительно заряженная частица движется по окружности в плоскости (xy), перпендикулярной к направлению магнитного поля $\boldsymbol{H}$, выбранному за ось z (на рис. 13). Магнитное поле направлено вверх перпендикулярно к площади чертежа. Пусть, далее, электрическое поле направлено по оси y. Тогда электрическое поле будет ускорять частицу при ее движении по левой дуге полуокружности и замедлять при движении по правой полуокружности. Круговая траектория будет искажаться. Верхнюю часть окружности частица проходит с большей скоростью, чем нижнюю. Магнитное поле в нижней части окружности будет загибать траекторию частицы сильнее, чем в верхней. Поэтому проекция пути, проходимого частицей, на ось x в нижней части окружности будет меньше, чем в верхней. В итоге после каждого оборота возникает некоторое смещение частицы вдоль оси x, в положительном ее направлении (на рис. 13 слева направо). В результате этого частица начнет смещаться в положительном направлении оси x.

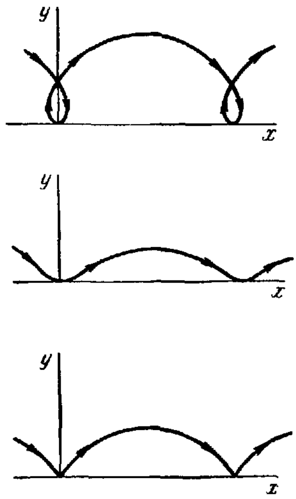

Рис. 14.

Аналогичное рассуждение для отрицательной частицы приводит к тому же направлению дрейфа.

Интегрируя еще раз выражения (39,13) и (39,14), находим уравнения траектории частицы в параметрическом виде:

$$x = \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{cEt}{H} + x_0, \qquad (39,17)$$

$$y = -\frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_c} \cos \omega_c t + y_0. \qquad (39,18)$$

Кривая, описываемая частицей, носит название трохоиды. Конкретные параметры трохоиды зависят от начальных условий. Если положить, что при $t = 0$ заряженная частица находилась в начале координат, то $x_0 = 0$; $y_0 = -\frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_c}$. При этом форма кривой определяется только значением начальной скорости $v_\perp^{(0)}$. При $|v_\perp^{(0)}| > \frac{cE}{H}$ получается верхняя кривая рис. 14, при $|v_\perp^{(0)}| < \frac{cE}{H}$ — средняя кривая. Нижняя кривая, циклоида, отвечает случаю $v_\perp^{(0)} = -\frac{cE}{H}$.

Если $\boldsymbol{E}$ не перпендикулярно к $\boldsymbol{H}$, то уравнение (39,12) можно спроектировать на плоскость, перпендикулярную к $\boldsymbol{H}$, и ось z. Тогда находим

$$\frac{d\boldsymbol{V}_\perp}{dt} = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{V}_\perp \boldsymbol{H}], \qquad \frac{dV_z}{dt} = \frac{e}{m} E_\parallel,$$

где $E_{\parallel}$ — *слагающая электрического поля, параллельная магнитному полю.* В скорости дрейфа вместо E следует при этом написать $E_{\perp}$. На дрейф частицы накладывается равномерно ускоренное движение вдоль магнитного поля под действием силы $eE_{\parallel}$.

§ 40. Движение заряженных частиц в медленно изменяющихся магнитных полях

Обратимся теперь к весьма важному случаю движения частиц в магнитных полях, переменных во времени и в пространстве. В общем случае переменных полей интегрирование уравнений движения оказывается весьма трудной задачей. Поэтому мы ограничимся случаем полей, медленно изменяющихся во времени и от точки к точке.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле медленно изменяется во времени, оставаясь однородным в пространстве. Пусть частица вращается с циклотронной частотой ω_C в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Мы будем предполагать, что изменение поля за один оборот достаточно мало, т. е.

$$T_C\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| \ll |\boldsymbol{H}|, \tag{40,1}$$

где $T_C=\dfrac{2\pi}{\omega_C}$.

При изменении поля во времени можно написать

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=-\frac{1}{c}\int\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}, \tag{40,2}$$

где контуром интегрирования служит траектория частицы. Умножив (40,2) на заряд частицы и считая, что за время одного оборота величина $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ остается постоянной, можем написать

$$e\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=-\frac{e}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|S=-\frac{e}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|\pi R_C^2. \tag{40,3}$$

Интеграл, стоящий в (40,3) слева, представляет работу, произведенную над зарядом за один оборот. Она равна приращению кинетической энергии движения в плоскости (xy), которую обозначим через $\Delta\varepsilon_{\perp}$. Поэтому

$$\Delta\varepsilon_{\perp}=-\frac{e}{c}\pi R_C^2\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|=\frac{|e|\,\pi R_C^2}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|. \tag{40,4}$$

Знак минус означает, что частица с отрицательным зарядом движется в направлении, обратном положительному направлению при интегрировании по контуру.