где $E_\parallel$ — *слагающая электрического поля, параллельная магнитному полю.* В скорости дрейфа вместо E следует при этом написать $E_\perp$. На дрейф частицы накладывается равномерно ускоренное движение вдоль магнитного поля под действием силы $eE_\parallel$.

§ 40. Движение заряженных частиц в медленно изменяющихся магнитных полях

Обратимся теперь к весьма важному случаю движения частиц в магнитных полях, переменных во времени и в пространстве. В общем случае переменных полей интегрирование уравнений движения оказывается весьма трудной задачей. Поэтому мы ограничимся случаем полей, медленно изменяющихся во времени и от точки к точке.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле медленно изменяется во времени, оставаясь однородным в пространстве. Пусть частица вращается с циклотронной частотой ω_C в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Мы будем предполагать, что изменение поля за один оборот достаточно мало, т. е.

$$T_C\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| \ll |H|, \tag{40,1}$$

где $T_C = \dfrac{2\pi}{\omega_C}$.

При изменении поля во времени можно написать

$$\oint E\,dl = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial H}{\partial t}\,dS, \tag{40,2}$$

где контуром интегрирования служит траектория частицы. Умножив (40,2) на заряд частицы и считая, что за время одного оборота величина $\frac{\partial H}{\partial t}$ остается постоянной, можем написать

$$e\oint E\,dl = -\frac{e}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| S = -\frac{e}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| \pi R_C^2. \tag{40,3}$$

Интеграл, стоящий в (40,3) слева, представляет работу, произведенную над зарядом за один оборот. Она равна приращению кинетической энергии движения в плоскости (xy), которую обозначим через $\Delta\varepsilon_\perp$. Поэтому

$$\Delta\varepsilon_\perp = -\frac{e}{c}\pi R_C^2\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| = \frac{|e|\,\pi R_C^2}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|. \tag{40,4}$$

Знак минус означает, что частица с отрицательным зарядом движется в направлении, обратном положительному направлению при интегрировании по контуру.

Найдем производную $\frac{d\varepsilon_\perp}{dt}$. На основании (40,4) и (39,10) имеем

$$\frac{d\varepsilon_\perp}{dt}=\frac{\Delta\varepsilon_\perp}{T_C}=\frac{|e|\pi R_C^2}{cT_C}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|=\frac{|e|\pi\omega_C R_C^2}{2\pi c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|=\mu\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|=\mu\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|. \tag{40,5}$$

По определению (39,10)

$$\frac{d\varepsilon_\perp}{dt}=\mu\frac{\partial H}{\partial t}+H\frac{\partial\mu}{\partial t}. \tag{40,6}$$

Сравнивая уравнения (40,5) и (40,6), мы видим, что при медленном изменении магнитного поля магнитный момент частицы остается постоянным:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}=0. \tag{40,7}$$

К аналогичному выводу можно прийти при рассмотрении движения частицы в стационарном магнитном поле, медленно изменяющемся от точки к точке.

Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z и напряженность его увеличивается с ростом z. Линии поля сходятся, как это изображено на рис. 15. Мы будем считать, что на расстоянии $\sim R_C$ изменение магнитного поля мало, т. е.

$$R_C\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|\ll|H|. \tag{40,8}$$

Рис. 15.

Поскольку магнитное поле изменяется вдоль оси z, радиальная компонента поля H_r также отлична от нуля. Из уравнения непрерывности в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)=-r\frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Интегрируя и пренебрегая при этом зависимостью $\frac{\partial H_z}{\partial z}$ от координаты r на окружности радиуса $r\sim R_C$, находим

$$H_r\approx-\frac{r}{2}\frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Поскольку при выполнении условия (40,8) компонента H_r мала по сравнению с компонентой H_z для всех $r<R_C$, можно

считать, что $|H| \approx H_z$, т. е. поле направлено под малым углом к оси z, и

$$H_r \approx -\frac{r}{2}\frac{\partial |H|}{\partial z}. \qquad (40,9)$$

Если компонента магнитного поля $H_r \neq 0$, то на частицу, движущуюся в плоскости (xy) по окружности с циклотронной частотой, действует сила в направлении оси z. Частица будет совершать дрейф в этом направлении, причем компонента v_z удовлетворяет уравнению движения

$$m\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{c}v_\perp H_r = -\frac{e}{2c}v_\perp R_C\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{e}{2c}R_C^2\omega_C\frac{\partial H}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H}{\partial z}. \qquad (40,10)$$

Отсюда обычным способом, умножая (40,10) на v_z, находим

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_z^2}{2} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Поскольку полная энергия частицы сохраняется, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_z^2}{2}+\frac{mv_\perp^2}{2}\right) = 0;$$

отсюда получаем

$$\frac{d\varepsilon_\perp}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\perp^2}{2}\right) = \mu\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (40,11)$$

Сравнивая (40,11) с (40,6), мы снова приходим к выводу о сохранении магнитного момента частицы:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0.$$

Сохранение магнитного момента в медленно изменяющемся неоднородном магнитном поле приводит к весьма важным следствиям. Поскольку $\mu = \frac{\varepsilon_\perp}{H}$ и $R_C = \frac{cmv_\perp}{eH} = \frac{c}{eH}\sqrt{2m\varepsilon_\perp} \sim \frac{1}{\sqrt{H}}$, радиус окружностей, по которым движется частица, уменьшается в сторону возрастающих значений z (см. рис. 15).

Пусть θ_0 — угол, образуемый вектором скорости частицы с осью z в некоторой точке z_0, а θ — тот же угол в произвольной точке. Точка в точке $z = z_0$

$$\varepsilon_\perp = \frac{mv_\perp^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\sin^2\theta_0 = \mu H(z_0),$$

где $H(z_0)$ — значение магнитного поля в точке z_0. В некоторой точке z напряженность поля равна $H(z)$ и

$$\varepsilon_\perp = \mu H(z) = \frac{mv_0^2}{2}\sin^2\theta.$$

Поэтому имеем

$$\sin\theta = \sin\theta_0\sqrt{\frac{H(z)}{H(z_0)}}.$$

При движении частицы вдоль оси z и увеличении напряженности поля угол θ возрастает. В точке z^*, где $\sqrt{\frac{H(z^*)}{H(z_0)}} \approx \frac{1}{\sin\theta_0}$, $\sin\theta = 1$ и $v_\perp = v_0$.

Это означает, что компонента скорости частицы v_z обращается в нуль. Дальше точки z^* частица двигаться не может и отражается в область $z < z^*$. Область $z \geqslant z^*$, непроницаемая для частиц с начальной скоростью $v_\perp = v_0 \sin\theta_0$, называется магнитным зеркалом.

Отражение частиц от магнитного зеркала играет существенную роль в различных электронных устройствах. Э. Ферми была высказана идея об ускорении частиц в космических лучах в результате отражения от магнитных зеркал. Роль последних могут играть облака межзвездной материи. Если допустить, что в облаках межзвездной материи напряженность магнитного поля выше, чем в разделяющем их пространстве, то все частицы, заключенные между облаками, будут отражаться от них, как от магнитных зеркал. Предположим, что облака движутся навстречу друг другу со скоростями v. Заряженные частицы, сталкиваясь с движущимися облаками и отражаясь от них, изменяют скорость на $2v$ при каждом отражении. Расчеты показывают, что в космических условиях скорости частиц могут достигать огромных величин.

В заключение подчеркнем, что все полученные результаты относятся только к движению частиц со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света c. В ч. II будет рассмотрено движение со скоростями, сравнимыми со скоростью света c.

§ 41. Функции Лагранжа и функция Гамильтона частицы, движущейся в электромагнитном поле

Уравнения движения частицы в электромагнитном поле

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right) \tag{41,1}$$

могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа, если ввести функцию Лагранжа соотношением

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\boldsymbol{Av}. \tag{41,2}$$