точке z напряженность поля равна $H(z)$ и

$$\varepsilon_{\perp} = \mu H(z) = \frac{mv_0^2}{2} \sin^2 \theta.$$

Поэтому имеем

$$\sin \theta = \sin \theta_0 \sqrt{\frac{H(z)}{H(z_0)}}.$$

При движении частицы вдоль оси z и увеличении напряженности поля угол θ возрастает. В точке z^*, где $\sqrt{\frac{H(z^*)}{H(z_0)}} \approx \frac{1}{\sin \theta_0}$, $\sin \theta = 1$ и $v_{\perp} = v_0$.

Это означает, что компонента скорости частицы v_z обращается в нуль. Дальше точки z^* частица двигаться не может и отражается в область $z < z^*$. Область $z \geqslant z^*$, непроницаемая для частиц с начальной скоростью $v_{\perp} = v_0 \sin \theta_0$, называется магнитным зеркалом.

Отражение частиц от магнитного зеркала играет существенную роль в различных электронных устройствах. Э. Ферми была высказана идея об ускорении частиц в космических лучах в результате отражения от магнитных зеркал. Роль последних могут играть облака межзвездной материи. Если допустить, что в облаках межзвездной материи напряженность магнитного поля выше, чем в разделяющем их пространстве, то все частицы, заключенные между облаками, будут отражаться от них, как от магнитных зеркал. Предположим, что облака движутся навстречу друг другу со скоростями v. Заряженные частицы, сталкиваясь с движущимися облаками и отражаясь от них, изменяют скорость на $2v$ при каждом отражении. Расчеты показывают, что в космических условиях скорости частиц могут достигать огромных величин.

В заключение подчеркнем, что все полученные результаты относятся только к движению частиц со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света c. В ч. II будет рассмотрено движение со скоростями, сравнимыми со скоростью света c.

§ 41. Функции Лагранжа и функция Гамильтона частицы, движущейся в электромагнитном поле

Уравнения движения частицы в электромагнитном поле

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right) \tag{41,1}$$

могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа, если ввести функцию Лагранжа соотношением

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}. \tag{41,2}$$

Составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0.$$

Очевидно, имеем для обобщенного импульса

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}. \qquad (41,3)$$

Соответственно, обобщенная сила

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\boldsymbol{v}} = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) =$$
$$= -e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,\{(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A} + [\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}]\}.$$

При вычислении частной производной по координатам $\boldsymbol{v}$ считалась постоянной.

Подставляя найденные выражения в уравнения Лагранжа, находим

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}],$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{e}{c}\,(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}] - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Однако полная производная по времени согласно (I, 7) будет

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A},$$

откуда

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left\{-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi\right\} + \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}],$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right),$$

что совпадает с (41,1).

Напишем еще функцию Гамильтона для частицы:

$$H = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} - L = \frac{\boldsymbol{P}}{m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 +$$
$$+ e\varphi - \frac{e\boldsymbol{A}}{mc}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\varphi. \qquad (41,4)$$

В случае системы независимых частиц функции Лагранжа и Гамильтона можно представить в виде

$$L = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum e_i \varphi_i + \sum \frac{e_i}{c} A_i v_i =$$
$$= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum e_i \varphi_i + \frac{1}{c} \sum j_i A_i \quad (41,5)$$

и, соответственно,

$$H = \sum \frac{1}{2m_i} \left(P_i - \frac{e_i}{c} A \right)^2 + \sum e_i \varphi_i, \quad (41,6)$$

где A_i и φ_i — значения потенциалов поля в месте нахождения i-й частицы; суммирование ведется по всем частицам системы.

В дальнейшем нам понадобятся эти выражения для функции Лагранжа и Гамильтона.

Заметим, что если ввести в выражение для обобщенного импульса P_i вектор-потенциал в постоянном однородном магнитном поле по формуле (19,16), то

$$P_i = p_i + \frac{e}{2c} [Hr] \quad (41,7)$$

и соответственно

$$H = \sum \frac{1}{2m_i} \left(P_i - \frac{e_i}{2c} [Hr] \right)^2 + \sum e_i \varphi_i. \quad (41,8)$$

§ 42. Движение и излучение системы из двух заряженных частиц

До сих пор мы рассматривали движение частиц во внешних полях. Сейчас мы обсудим вопрос о движении заряженных частиц в поле, создаваемом другими частицами.

Рассмотрим прежде всего задачу о движении двух взаимодействующих заряженных частиц [1]).

Эту задачу можно решить, пользуясь методом последовательных приближений. Именно, считая потери энергии частиц на излучение малыми, можно в первом приближении рассчитать траектории частиц. Зная последние, можно затем найти излучение системы.

[1]) В дальнейшем мы ограничимся кратким изложением проблемы, поскольку она является частным случаем задачи двух тел, рассматриваемой подробно в курсах классической механики. Детальное изложение этого и других вопросов, затрагиваемых в данном параграфе, можно найти в книгах: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, и Т. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, 1957.