В случае системы независимых частиц функции Лагранжа и Гамильтона можно представить в виде

$$L = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum e_i \varphi_i + \sum \frac{e_i}{c} A_i v_i =$$
$$= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum e_i \varphi_i + \frac{1}{c} \sum j_i A_i \quad (41,5)$$

и, соответственно,

$$H = \sum \frac{1}{2m_i} \left(P_i - \frac{e_i}{c} A\right)^2 + \sum e_i \varphi_i, \quad (41,6)$$

где A_i и φ_i — значения потенциалов поля в месте нахождения i-й частицы; суммирование ведется по всем частицам системы

В дальнейшем нам понадобятся эти выражения для функции Лагранжа и Гамильтона.

Заметим, что если ввести в выражение для обобщенного импульса P_i вектор-потенциал в постоянном однородном магнитном поле по формуле (19,16), то

$$P_i = p_i + \frac{e}{2c} [Hr] \quad (41,7)$$

и соответственно

$$H = \sum \frac{1}{2m_i} \left(P_i - \frac{e_i}{2c} [Hr]\right)^2 + \sum e_i \varphi_i. \quad (41,8)$$

§ 42. Движение и излучение системы из двух заряженных частиц

До сих пор мы рассматривали движение частиц во внешних полях. Сейчас мы обсудим вопрос о движении заряженных частиц в поле, создаваемом другими частицами.

Рассмотрим прежде всего задачу о движении двух взаимодействующих заряженных частиц [1]).

Эту задачу можно решить, пользуясь методом последовательных приближений. Именно, считая потери энергии частиц на излучение малыми, можно в первом приближении рассчитать траектории частиц. Зная последние, можно затем найти излучение системы.

---

[1]) В дальнейшем мы ограничимся кратким изложением проблемы, поскольку она является частным случаем задачи двух тел, рассматриваемой подробно в курсах классической механики. Детальное изложение этого и других вопросов, затрагиваемых в данном параграфе, можно найти в книгах: Л Д. Ландау и Е М Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, и Т. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, 1957.

Пусть заряженные частицы имеют массы m_1 и m_2; заряды их равны e_1 и e_2. Потенциальную энергию системы можно записать в виде

$$U = e_1\varphi(r),$$

где $\varphi(r)$ — потенциал поля, создаваемого зарядом e_2, находящимся на расстоянии r от заряда e_1.

Функцию Лагранжа системы можно записать в виде

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - e_1\varphi(r), \tag{42,1}$$

где $\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{r}}_1$; $\boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_2$; $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы, проведенные к частицам из произвольного начала координат.

Поскольку потенциальная энергия зависит только от расстояния между зарядами, т. е. $U = U(|\boldsymbol{r}|)$, где

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tag{42,2}$$

удобно перейти к системе координат центра инерции.

Именно, поместим начало координат в центр инерции — точку пространства, радиус-вектор которой по отношению к произвольной системе координат выражается формулой

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{42,3}$$

Из (42,2) и (42,3) находим

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}$$

и, соответственно, скорости частиц

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{R}}, \\ \boldsymbol{v}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{R}} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{R}, \end{aligned}\right\} \tag{42,4}$$

где $v_0 = \dot{\boldsymbol{r}}$ — относительная скорость частиц и $\dot{\boldsymbol{R}}$ — скорость центра инерции.

Подставляя значение скоростей в функцию Лагранжа, находим

$$L = \frac{M}{2}(\dot{\boldsymbol{R}})^2 + \frac{\mu}{2}(\dot{\boldsymbol{r}})^2 - U(|\boldsymbol{r}|), \tag{42,5}$$

где $M = m_1 + m_2$ — масса системы, а величина

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{42,6}$$

называется приведенной массой.

Координаты центра инерции $\boldsymbol{R}$ являются циклическими. Соответствующий обобщенный импульс сохраняется:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = (m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{R}} = \text{const}. \tag{42,7}$$

Центр инерции движется с постоянной скоростью (в частности, он может оставаться неподвижным).

Для исследования относительного движения зарядов введем координаты, начало которых помещено в центр инерции. Поскольку потенциальная энергия взаимодействия зависит только от расстояния r, поле имеет сферическую симметрию. Координата, отвечающая произвольному повороту системы, является циклической. Это означает, что имеет место закон сохранения момента:

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}] = \text{const}. \tag{42,8}$$

Умножая последнее выражение скалярно на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, имеем

$$(\boldsymbol{L}\boldsymbol{r}) = 0,$$

так что движение происходит в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{L}$.

Выбирая направление вектора $\boldsymbol{L}$ за ось z и плоскость, в которой происходит движение, за плоскость $z = 0$, можно ввести полярные координаты r, ψ и переписать лагранжиан, относящийся к относительному движению, в виде

$$L_{\text{отн}} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) - e_1\varphi(r). \tag{42,9}$$

Лагранжиан $L_{\text{отн}}$ формально совпадает с лагранжианом одной частицы, имеющей массу μ и движущейся во внешнем поле сил $e_1\varphi$. Координата ψ является циклической, и ей отвечает обобщенный импульс

$$p_\psi = \mu r^2\dot{\psi} = \text{const}. \tag{42,10}$$

Вычисляя в полярных координатах L_z, имеем, очевидно,

$$L_z = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2\dot{\psi}, \tag{42,11}$$

так что равенство

$$p_\psi = L_z = \text{const} = L$$

выражает закон сохранения момента.

Поскольку функция Лагранжа не зависит от времени, имеет место закон сохранения энергии:

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2) + e_1\varphi(r) = \text{const}. \tag{42,12}$$

Выражая из (42,11) $\dot{\varphi}$ через L_z, находим

$$E = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + e_1\varphi = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} + V(r), \tag{42,12'}$$

где величина $V(r)$, именуемая эффективной или центробежной потенциальной энергией, равна

$$V(r) = e_1\varphi(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \tag{42,13}$$

Энергия (42,12′) формально совпадает с энергией частицы, совершающей одномерное движение в поле с потенциальной энергией $V(r)$.

Характер относительного движения заряженных частиц определяется видом функции $\varphi(r)$.

Мы рассмотрим здесь случай разноименно заряженных частиц. При этом

$$\varphi = -\frac{e_2}{r}, \tag{42,14}$$

где e_2 — заряд второй частицы.

Ход центробежной энергии для этого случая изображен на рис. 16. Пунктиром на том же рисунке показан ход кривых $-\frac{e_1e_2}{r}$ и $\frac{L^2}{2\mu r^2}$. Прямая $E=0$ также показана пунктиром. Ход кривой $V(r)$ и положение точки минимума зависят от величины момента L.

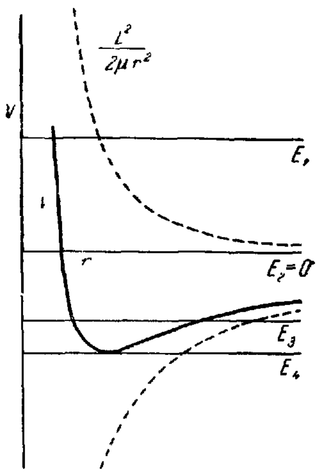

Рис. 16.

Переписав формулу (42,12′) в виде

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu}(E - V(r)), \tag{42,15}$$

мы видим, что допустимая область относительного движения частиц зависит от взаимоотношения между E и $V(r)$. Области, в которых $V(r) > E$, являются запрещенными; области, где $E > V(r)$ — допустимыми. Если существуют корни уравнения

$$E = V(r), \tag{42,16}$$

то они определяют точки остановки или апсидальные точки r_0, в которых радиальная скорость обращается в нуль. Если $E \geqslant 0$, то дозволенная область движения простирается от бесконечно удаленной области $r \to \infty$ до точки остановки, отвечающей минимальному расстоянию между частицами и определяемой пересечением прямой E с кривой $V(r)$.

Если $E < 0$, то имеются две точки остановки, отвечающие наименьшему и наибольшему расстояниям между зарядами. Движение совершается между этими точками.

Для нахождения траектории следует исключить время из (42,12) и (42,11).

Тогда имеем

$$d\psi = \frac{L}{\mu r^2}\,dt = \frac{L}{\mu r^2}\,\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - e_1\varphi(r)\right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}.$$

Интегрируя, находим

$$\psi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L^2}(E - e_1\varphi) - \frac{1}{r^2}}} - \psi_0. \qquad (42,17)$$

В частности, при движении в кулоновском поле притяжения подстановка $\varphi(r)$ из (42,14) дает

$$\psi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L^2}\left(E + \frac{e_1e_2}{r}\right) - \frac{1}{r^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2e_1e_2\mu}{L^2}u - u^2}} =$$

$$= -\arccos\frac{\frac{L^2u}{e_1e_2\mu} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(e_1e_2)^2}}} - \psi_0,$$

где было обозначено

$$u = \frac{1}{r}.$$

Обращая arccos, находим уравнение траектории

$$\left(\frac{L^2}{\mu e_1e_2}\right)\frac{1}{r} = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(e_1e_2)^2}}\cos(\psi + \psi_0)\right]. \qquad (42,18)$$

Сравнивая последнюю формулу с общим уравнением конических сечений

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\psi + \psi_0),$$

где ε — эксцентриситет, мы видим, что движение зарядов происходит по коническому сечению с эксцентриситетом

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(e_1e_2)^2}}. \qquad (42,19)$$

Параметр конического сечения $p = \frac{L^2}{\mu e_1e_2}$. В зависимости от знака E имеем

$E > 0,\quad \varepsilon > 1$ — гипербола,

$E = 0,\quad \varepsilon = 1$ — парабола,

$E < 0,\quad \varepsilon < 1$ — эллипс,

$E = -\frac{\mu(e_1e_2)^2}{2L^2},\quad \varepsilon = 0$ — окружность.

Найденное решение (42,18) определяет движение каждой из частиц. Именно, частицы движутся по траекториям, представляющим конические сечения с фокусом, находящимся в центре инерции системы.

Найденное решение не отличается от соответствующего решения кеплеровой задачи о движении планет. Значения характерных величин конических сечений приведены в цитированных руководствах по механике.

Найдем теперь излучение системы двух зарядов. Мы ограничимся здесь случаем периодического движения, т. е. случаем притяжения при $E<0$. Энергия, излучаемая за период T, согласно (27,9) и (28,11), равна

$$-(\Delta E)_T=\frac{2}{3c^3}\int(\ddot{\boldsymbol{d}})^2\,dt=\frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\int\limits_0^T F^2\,dt,$$

где

$$\boldsymbol{F}=\frac{e_1e_2}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Вместо интегрирования по периоду, можно с помощью (42,11) интегрировать по углу ψ. Выражая r через ψ по формуле (42,11), получаем

$$\begin{aligned}-(\Delta E)_T&=\frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2(e_1e_2)^2\int\frac{dt}{r^4}=\\&=\frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2(e_1e_2)^2\frac{\mu}{L}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi}{r^2}=\\&=\frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{(e_1e_2\mu)^4}{\mu L^5}\int\limits_0^{2\pi}[1+\varepsilon\cos(\psi+\psi_0)]^2\,d\psi=\\&=\frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{(e_1e_2\mu)^4\pi}{\mu L^5}(2+\varepsilon^2).\end{aligned}\qquad(42,20)$$

Таким образом, заряд, движущийся по замкнутой орбите, непрерывно излучает энергию. В частности, при движении по круговой орбите $\varepsilon=0$, $L^2=-\dfrac{\mu(e_1e_2)^2}{2E}$, и формула (42,20) приобретает более простой вид:

$$-(\Delta E)_T=\frac{16\pi\sqrt{2\mu}}{3c^3e_1e_2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2|E|^{5/2}.\qquad(42,21)$$

Потеря энергии на излучение приводит к тому, что круговая орбита превращается в свертывающуюся спираль.

Числовой расчет показывает, что система «электрон, обращающийся вокруг протона», высвечивает свою энергию за время $T \approx 10$ *сек* при линейных размерах орбиты $\sim 10^{-8}$ *см*.

Мы видим, что планетарная модель атома коренным образом противоречит законам классической электродинамики. Впоследствии при изложении квантовой механики будет выяснена причина этого противоречия. Оказывается, что нестабильность планетарной модели атома является иллюстрацией общего положения о неприменимости законов классической механики и классической электродинамики к рассмотрению внутриатомных явлений.

§ 43. Рассеяние частиц и излучение при рассеянии

Рассмотрим теперь процессы, возникающие при пролете частиц, отталкивающихся друг от друга или притягивающихся, но обладающих энергией $E > 0$. Из общих соображений, связанных с ходом кривой $V(r)$ (см. рис. 16), ясно, что в обоих этих случаях движение будет происходить по незамкнутой орбите.

Будем для наглядности считать, что одна из заряженных частиц неподвижна относительно лабораторной системы координат. Мы будем называть ее рассеивателем. Другая частица, именуемая рассеиваемой, движется относительно первой. На достаточно большом расстоянии, когда взаимодействием частиц можно пренебречь, движение падающей частицы является прямолинейным. Скорость этого движения v_0 будем считать заданной. При сближении частиц происходит отклонение падающей частицы от прямолинейного полета, а частица, ранее неподвижная, получает импульс и приходит в движение.

Тогда говорят, что произошло столкновение частиц, в результате которого возникло взаимное их рассеяние.

По причинам, которые будут особенно ясны из дальнейшего, изучение процесса рассеяния может дать важнейшую информацию о характере взаимодействия между частицами.

Изучение процессов рассеяния является в настоящее время основным экспериментальным методом ядерной физики. Исследование взаимодействия частиц, например, быстрых электронов или протонов с ядрами, обычно осуществляется следующим путем: пучок частиц, имеющих определенные свойства и известную скорость, падает на образец вещества, содержащий частицы другого сорта. Наблюдая пучок рассеиваемых частиц, можно сделать заключение о характере взаимодействия, которое привело к рассеянию.

При такой постановке опытов рассеяние имеет характер массового процесса. Наблюдается поведение пучка, обычно содержащего огромное число частиц. Однако в основе процесса ле-