

Числовой расчет показывает, что система «электрон, обращающийся вокруг протона», высвечивает свою энергию за время $T \approx 10$ сек при линейных размерах орбиты $\sim 10^{-8}$ см.

Мы видим, что планетарная модель атома коренным образом противоречит законам классической электродинамики. Впоследствии при изложении квантовой механики будет выяснена причина этого противоречия. Оказывается, что нестабильность планетарной модели атома является иллюстрацией общего положения о неприменимости законов классической механики и классической электродинамики к рассмотрению внутриатомных явлений.

§ 43. Рассеяние частиц и излучение при рассеянии

Рассмотрим теперь процессы, возникающие при пролете частиц, отталкивающихся друг от друга или притягивающихся, по обладающих энергией $E > 0$. Из общих соображений, связанных с ходом кривой $V(r)$ (см. рис. 16), ясно, что в обоих этих случаях движение будет происходить по незамкнутой орбите.

Будем для наглядности считать, что одна из заряженных частиц неподвижна относительно лабораторной системы координат. Мы будем называть ее рассеивателем. Другая частица, именуемая рассеиваемой, движется относительно первой. На достаточно большом расстоянии, когда взаимодействием частиц можно пренебречь, движение падающей частицы является прямолинейным. Скорость этого движения v_0 будем считать заданной. При сближении частиц происходит отклонение падающей частицы от прямолинейного полета, а частица, ранее неподвижная, получает импульс и приходит в движение.

Тогда говорят, что произошло столкновение частиц, в результате которого возникло взаимное их рассеяние.

По причинам, которые будут особенно ясны из дальнейшего, изучение процесса рассеяния может дать важнейшую информацию о характере взаимодействия между частицами.

Изучение процессов рассеяния является в настоящее время основным экспериментальным методом ядерной физики. Исследование взаимодействия частиц, например, быстрых электронов или протонов с ядрами, обычно осуществляется следующим путем: пучок частиц, имеющих определенные свойства и известную скорость, падает на образец вещества, содержащий частицы другого сорта. Наблюдая пучок рассеиваемых частиц, можно сделать заключение о характере взаимодействия, которое привело к рассеянию.

При такой постановке опытов рассеяние имеет характер массового процесса. Наблюдается поведение пучка, обычно содержащего огромное число частиц. Однако в основе процесса ле-

жит индивидуальное взаимодействие между рассеиваемой и рассеивающей частицами. Поэтому процесс рассеяния необходимо характеризовать величиной, не зависящей ни от свойств падающего пучка, ни от свойств материала рассеивателя, например, его плотности, но определяемой исключительно взаимодействием одной рассеиваемой и одной рассеивающей частиц.

Будем характеризовать падающий пучок его интенсивностью или плотностью потока частиц $I_0 = n v_0$, где n — число частиц в единице объема пучка, а v_0 — их скорость; I_0 равно, очевидно, числу частиц, проходящих через 1 см^2 сечения пучка в 1 секунду.

Выберем положение рассеивающей частицы за начало координат. Пусть через площадку, видимую из рассеивающего центра под телесным углом $d\Omega$, проходит в единицу времени dN рассеянных частиц. Определим основную величину, характеризующую процесс рассеяния — дифференциальное эффективное сечение рассеяния $d\sigma$, как отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{I_0}. \quad (43,1)$$

Эффективное сечение имеет, очевидно, размерность площади. Тогда число частиц пучка, рассеянных в угол $d\Omega$ за время dt объемом рассеивателя V , равно

$$dN_{\text{полн}} = d\sigma I_0 \rho V dt, \quad (43,2)$$

где ρ — плотность числа частиц (ρV — полное число рассеивающих частиц).

Если рассеяние происходит без изменения энергии рассеиваемых частиц, то, умножая числитель и знаменатель (43,1) на энергию ϵ частицы, может представить дифференциальное сечение в виде

$$d\sigma = \frac{dI}{I_{0\epsilon}}, \quad (43,3)$$

где dI — поток энергии, переносимой частицами в единицу времени в телесном угле $d\Omega$, $I_{0\epsilon}$ — плотность потока энергии в падающем пучке. Формула (43,3) совпадает с определением сечения, данным в § 36.

Наряду с дифференциальным эффективным сечением, рассеяние характеризуют также полным сечением

$$\sigma = \int d\sigma, \quad (43,4)$$

где интегрирование ведется по всем возможным значениям телесного угла.

Величину $d\sigma$, выражающуюся через непосредственно измеряемые величины, можно связать с параметрами, характеризующими индивидуальный процесс столкновения.

Рассмотрим индивидуальный акт столкновения между двумя частицами. Мы ограничимся случаем, когда внутренняя энергия частиц остается неизменной. Такие столкновения называются упругими. Не следует думать, что при упругих столкновениях энергия рассеянной частицы остается неизменной. Рассеивающая частица получает от рассеянной некоторый импульс и энергию, величина которых зависит от соотношения между массами частиц.

При неупругих столкновениях, например, столкновении электрона с ионом, происходит дополнительная передача энергии иону, внутреннее состояние которого изменяется. Такие процессы более сложны и будут рассмотрены в ч. V.

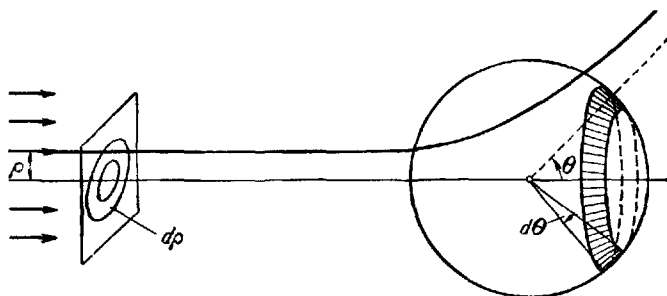


Рис. 17.

Сначала будем относить процесс рассеяния двух частиц к системе центра инерции. Согласно результатам предыдущего параграфа, задача об относительном движении частиц в системе центра инерции сводится к задаче о движении одной частицы с приведенной массой μ относительно неподвижного силового центра, помещенного в центре инерции.

Пусть падающая частица вдали от центра инерции движется прямолинейно со скоростью v_0 . Ее энергия и момент соответственно равны

$$E = \frac{\mu v_0^2}{2}; \quad L = \mu v_0 \rho = \rho \sqrt{2\mu E}, \quad (43,5)$$

где ρ — расстояние между силовым центром и прямой, по которой прошла бы мимо него частица, если бы взаимодействие отсутствовало. Величина ρ называется прицельным параметром, или прицельным расстоянием.

При заданных значениях E и ρ траектория полностью определена. Процесс рассеяния мы будем характеризовать углом рассеяния (отклонения) θ , представляющим угол между направлением полета частицы вдали от центра до и после рассеяния (рис. 17). Очевидно (рис. 18), что угол θ дополняет угол φ_0 ме-

жду асимптотами к траектории до 180° . В силу симметрии силового поля и картины движения относительно оси пучка, число рассеянных частиц, а вместе с ним и эффективное сечение рассеяния зависят только от угла θ , но не от азимутального угла.

Телесный угол $d\Omega$ можно поэтому представить в виде

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta,$$

а число частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$, соответственно равно

$$dN = 2\pi I_0 \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = I_0 d\sigma, \quad (13,6)$$

где обозначено

$$d\sigma = 2\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Поскольку траектория рассеянной частицы однозначно определяется энергией и прицельным параметром (E и ρ), каждому углу рассеяния отвечает траектория с определенным значением прицельного параметра. Отсюда следует, что число частиц, рассеянных на данный угол θ , равно числу частиц, имевших на бесконечно большом удалении от центра данное значение прицельного параметра.

Иными словами, в телесный угол $d\Omega$ рассеиваются все частицы, имевшие вдали от центра значение прицельного параметра ρ , лежащего в интервале $\rho, \rho + d\rho$. Поэтому число рассеянных частиц наряду с (13,6) можно написать в виде

$$dN = I_0 2\pi \rho d\rho. \quad (43,7)$$

где $2\pi \rho d\rho$ — площадь кольца, изображенного на рис. 17 слева. Сравнивая (43,6) и (43,7), находим

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|. \quad (43,8)$$

Поскольку большим значениям ρ отвечают малые отклонения θ , а сечение по смыслу должно быть величиной положительной, мы написали знак абсолютного значения при производной. Интегрируя формулу (43,8) слева по углам рассеяния в интервале от θ до π , а справа по соответствующим значениям ρ , т. е.

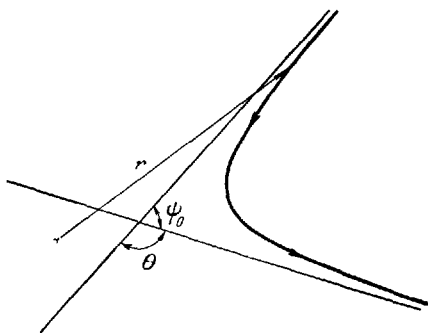


Рис. 18.

в интервале от $\rho(\theta)$ до нуля, получаем важное соотношение

$$\frac{\rho^2}{2} = \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (43,9)$$

Для вычисления дифференциального эффективного сечения необходимо установить связь между прицельным параметром ρ и углом рассеяния θ . Для этого достаточно рассчитать траекторию и найти зависимость угла ψ_0 между асимптотами от параметра ρ .

Общая формула (42,17) дает

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} = \rho \sqrt{2\mu E} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V(r))}} = \\ &= \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) - \frac{1}{r^2}}}. \end{aligned} \quad (43,10)$$

Пределы интеграла определяются из следующих соображений: ψ_0 представляет изменение угла ψ при пролете частицы по всей траектории. Траектория имеет две ветви — приближение частицы от бесконечности до точки наибольшего приближения (точки остановки) r_0 и удаление от точки r_0 до бесконечности (см. рис. 18). Траектория частицы всегда симметрична относительно точки остановки r_0 . Это следует из обратимости процесса рассеяния — частица, движущаяся в обратном направлении, должна уйти по той асимптоте, по которой движется частица в прямом направлении (см. рис. 18). Поэтому интеграл по траектории можно написать в виде суммы двух равных интегралов, взятых в пределах от r_0 до бесконечности:

$$\psi_0 = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) - \frac{1}{r^2}}}, \quad (43,11)$$

где r_0 — корень уравнения

$$E = V(r_0) = U(r_0) + \frac{\rho^2 E}{r_0^2}. \quad (43,12)$$

Поскольку угол рассеяния $\theta = \pi - \psi_0$, формулы (43,11) и (43,12) связывают искомое значение θ с параметрами столкновения — величинами E и ρ при произвольном виде потенциальной энергии U , зависящей только от расстояния r .

Рассмотрим, в частности, случай кулоновского отталкивания

$$U = \frac{|e_1 e_2|}{r}.$$

Выражения (43,11) и (43,12) приобретают при этом вид

$$E = \frac{|e_1 e_2|}{r_0} + \frac{\rho^2 E}{r_0^2}, \quad (43,13)$$

или

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{|e_1 e_2|}{2E\rho^2} + \sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2E\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}} \quad (43,14)$$

и

$$\psi_0 = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{|e_1 e_2|}{Er}\right) - \frac{1}{r^2}}}. \quad (43,15)$$

Вводя новую переменную $z = \frac{1}{r}$, получаем

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 2 \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{|e_1 e_2|}{\rho^2 E} z - z^2}} = -2 \operatorname{arccos} \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E} + z}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}} \Bigg|_0^{z_0} = \\ &= 2 \operatorname{arccos} \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}}. \quad (43,16) \end{aligned}$$

При вычислении подставлено значение $z_0 = \frac{1}{r_0}$ из выражения (43,14). Обращая arccos , находим

$$\cos \frac{\psi_0}{2} = \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}},$$

или

$$\rho = \frac{|e_1 e_2|}{2E} \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} = \frac{|e_1 e_2|}{2E} \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{|e_1 e_2|}{2E} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (43,17)$$

Формула (43,17) дает искомую связь между ρ и θ . Подставляя значение ρ в (43,8), имеем

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{1}{16} \frac{(e_1 e_2)^2}{E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (43,18)$$

Формула (43,18) дает дифференциальное сечение рассеяния частиц, отталкивающихся по закону Кулона. Поскольку $\sigma \sim (e_1 e_2)^2$, ясно, что в случае притяжения (при $E > 0$) получается идентичный результат. Найденное выражение для сечения носит название формулы Резерфорда. Она была получена в связи

с опытами по рассеянию α -частиц на атомах, позволившими Резерфорду установить ядерную структуру атомов.

Формулу (43,11) можно обратить и найти вид функции $U(r)$ с помощью известных из опытных данных величин. Для этого нужно рассматривать (43,11) как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $U(r)$. При некоторых (весьма общих) допущениях о виде функции $U(r)$ уравнение (43,11) допускает решение¹⁾.

Именно, запишем θ в виде

$$\theta = \pi - \psi_0 = \pi - \int_{r_0}^{\infty} \frac{2\rho dr}{r \sqrt{\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2 - \rho^2}}. \quad (43,19)$$

Относительно $U(r)$ мы будем предполагать, что она убывает с ростом r при $r \rightarrow \infty$. Введем новую функцию

$$E(r) = \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2, \quad (43,20)$$

и перейдем от интегрирования по r к интегрированию по F . Так как

$$2 \frac{dr}{r} = 2d \ln r = \frac{d \ln r^2}{dF} dF$$

и, в силу (43,12),

$$F(r_0) = \left(1 - \frac{U(r_0)}{E}\right) r_0^2 = \rho^2, \quad (43,21)$$

то

$$\theta = \pi - \int_{\rho^2}^{\infty} \frac{\rho \frac{d \ln r^2}{dF} dF}{\sqrt{F - \rho^2}}. \quad (43,22)$$

Написав

$$\frac{d \ln r^2}{dF} \equiv \frac{d}{dF} \ln \left(\frac{r^2}{F}\right) + \frac{d \ln F}{dF},$$

находим

$$\theta = \pi + \int_{\rho^2}^{\infty} \frac{\rho \frac{d}{dF} \ln \left(\frac{F}{r^2}\right) dF}{\sqrt{F - \rho^2}} - \int_{\rho^2}^{\infty} \frac{\rho \frac{d \ln F}{dF} dF}{\sqrt{F - \rho^2}}.$$

Последний интеграл легко вычисляется, так как

$$\int_{\rho^2}^{\infty} \frac{dF}{F \sqrt{F - \rho^2}} = \frac{2}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{F - \rho^2}}{\rho} \Big|_{\rho^2}^{\infty} = \frac{\pi}{\rho}.$$

¹⁾ Мы следуем работе О. Б. Фирсова, ЖЭТФ, 24, 279, 1953.

Поэтому

$$\theta = \int_{\rho^2}^{\infty} \rho \frac{d \ln \frac{F'}{r^2}}{dF'} \frac{dF'}{\sqrt{F' - \rho^2}}. \quad (43,23)$$

Умножим обе части (43,23) на множитель $\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - F}}$ и проинтегрируем по параметру ρ в пределах от $\rho = \sqrt{F}$ до $\rho \rightarrow \infty$. Тогда имеем

$$\int_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - F}} = \int_{\sqrt{F}}^{\infty} \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\infty} \frac{d \ln \left(\frac{F'}{r^2} \right)}{dF'} \frac{dF'}{\sqrt{(\rho^2 - F)(F' - \rho^2)}}.$$

Изменим порядок интегрирования по ρ и по F' , написав

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{F}}^{\infty} \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\infty} \frac{d \ln \left(\frac{F'}{r^2} \right)}{dF'} \frac{dF'}{\sqrt{(\rho^2 - F)(F' - \rho^2)}} &= \\ &= \int_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{d \ln \left(\frac{F'}{r^2} \right)}{dF'} dE' \int_{\sqrt{F'}}^{\sqrt{F}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\rho^4 + \rho^2(F + F') - FF'}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{1}{2} \int_{F'}^F \frac{d\rho^2}{\sqrt{-\rho^4 + \rho^2(F + F') - FF'}} = \frac{1}{2} \arccos \frac{(F + F') - \rho^2}{\sqrt{(F + F')^2 - 4FF'}} \Big|_{F'}^F = \frac{\pi}{2}.$$

То обстоятельство, что в результате интегрирования по ρ получился интеграл, не зависящий от F' , позволяет свести интегрирование по F' к элементарному преобразованию. Для получения более прозрачного результата прежде, чем сделать подстановку пределов, вернемся к переменной r , написав

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{d}{dF'} \ln \left(\frac{F'}{r^2} \right) dF' &= \int_r^{\infty} \frac{d}{dr'} \ln \left(\frac{F'}{(r')^2} \right) dr' = \\ &= \ln \left(1 - \frac{U(r')}{E} \right) \Big|_r^{\infty} = - \ln \left(1 - \frac{U(r)}{E} \right) = - \ln \frac{F}{r^2}. \end{aligned}$$

При этом согласно сделанному выше допущению мы положили $U \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

В итоге приходим к равенству

$$\pi \ln \frac{\sqrt{F}}{r} = - \int_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - F}}, \quad (43,24)$$

или

$$\frac{\sqrt{F}}{r} = \exp \left\{ - \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - F}} \right\}. \quad (43,25)$$

Последнее выражение содержит интегрирование только по ρ . Если известна зависимость $\sigma(\theta)$, в силу (43,17) задана также функциональная зависимость $\theta(\rho)$. Поэтому формула (43,25) представляет задание функции $F(r)$ в неявном виде.

Особенно простой результат получается для рассеяния частиц с большой энергией, для которых $U(r) \ll E$ при всех значениях r . При этом формулу (43,24) можно переписать, воспользовавшись равенствами

$$\ln \frac{\sqrt{F}}{r} = \ln \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2}}{r} \approx - \frac{U(r)}{2E},$$

$$\int_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - F}} = \int_{\sqrt{\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2}}^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2}} \approx \int_r^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}.$$

Тогда для искомой потенциальной энергии находим

$$U(r) \approx \frac{2E}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}. \quad (43,26)$$

Приведенные выше расчеты эффективного сечения рассеяния были выполнены в системе координат центра инерции. Для практического их использования необходимо осуществить переход к лабораторной системе отсчета.

Важность этого перехода видна из сравнения общей картины процесса рассеяния с точки зрения обеих координатных систем. В системе центра инерции каждая из частиц, падающая и рассеивающаяся, движется по траектории, определяемой формулой (43,10). Из равенства нулю полного импульса системы из двух частиц, отнесенного к координатам центра инерции, следует, что обе частицы движутся в противоположных направлениях с равными импульсами (рис. 19). Наоборот, с точки зрения лабораторной системы падающая и рассеивающаяся частицы неэквива-

лентны. До столкновения рассеивающая частица была неподвижна, после столкновения она приходит в движение (рис. 20).

Нашей задачей является установление связи между углами $\theta_{ц.и} = \Theta$ и $\theta_{л} = \Phi$. Для этого совместим на одном рисунке скорости рассеянной частицы после соударения в обеих системах

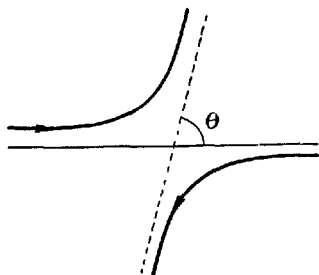


Рис. 19.

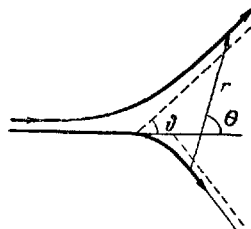


Рис. 20.

координат — центра инерции ($\mathbf{v}'_{ц.и.}$) и лабораторной ($\mathbf{v}'_л = \mathbf{v}$). Очевидно, что имеют место равенства (42,4) и (42,7). Вектор \mathbf{R} совпадает с направлением полета падающей частицы. Поэтому искомые углы равны соответственно (рис. 21)

$$\begin{aligned} \theta_{ц.и.} &= \angle(\mathbf{v}'_{ц.и.}, \mathbf{R}), \\ \theta_{л} &= \angle(\mathbf{v}'_л, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (43,27)$$

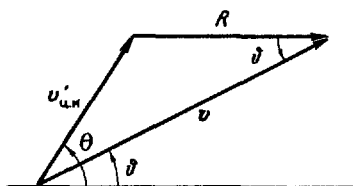


Рис. 21.

где штрих означает, что значения скорости берутся после столкновения и имеющийся в (42,4) индекс 1 нами для краткости опущен.

Из рис. 21 ясно, что

$$\operatorname{tg} \theta_{л} = \frac{v'_{ц.и.} \sin \theta_{ц.и.}}{v'_{ц.и.} \cos \theta_{ц.и.} + |\dot{\mathbf{R}}|}. \quad (43,28)$$

Согласно (42,4) и (42,7) можем написать

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{v}'_{ц.и.} &= \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Подставляя в (43,28), имеем

$$\operatorname{tg} \theta_{л} = \frac{\sin \theta_{ц.и.}}{\cos \theta_{ц.и.} + \frac{m_1}{m_2}}. \quad (43,29)$$

Формула (43,29) устанавливает¹⁾ связь между углами $\theta_{ц.и}$ и $\theta_{л}$.

Заметим, что если масса рассеивающей частицы $m_2 \gg m_1$, то $\theta_{л} \approx \theta_{ц.и}$. Смысл этого результата очевиден — очень тяжелая частица не получает импульса от пролетающей и остается неподвижной: система центра инерции совпадает с лабораторной.

Зная связь между углами рассеяния в лабораторной системе и системе центра инерции, можно выразить соответствующие эффективные сечения друг через друга. Именпо, написав число частиц, рассеянных в телесном угле $d\Omega_{л}$ и $d\Omega_{ц.и}$ в двух системах координат,

$$\begin{aligned} dN &= 2\pi I_0 \sigma_{л}(\theta_{л}) \sin \theta_{л} d\theta_{л}, \\ dN &= 2\pi I_0 \sigma_{ц.и}(\theta_{ц.и}) \sin \theta_{ц.и} d\theta_{ц.и}, \end{aligned}$$

находим искомую связь между сечением в системах координат — в лабораторной ($\sigma_{л}$) и центра инерции ($\sigma_{ц.и}$):

$$\sigma_{л}(\theta_{л}) = \sigma_{ц.и}(\theta_{ц.и}) \frac{\sin \theta_{ц.и} d\theta_{ц.и}}{\sin \theta_{л} d\theta_{л}}. \quad (43,30)$$

Полное сечение, в отличие от дифференциального, является одним и тем же во всех координатных системах:

$$\sigma = 2\pi \int \sigma_{л}(\theta_{л}) \sin \theta_{л} d\theta_{л} = 2\pi \int \sigma_{ц.и}(\theta_{ц.и}) \sin \theta_{ц.и} d\theta_{ц.и}. \quad (43,31)$$

Остановимся еще на вычислении энергии, теряемой рассеиваемой частицей. Из того же рис. 21 на основании теоремы косинусов можем написать

$$(v'_{ц.и})^2 = (v'_л)^2 + R^2 - 2R(v'_л) \cos \theta_{л}. \quad (43,32)$$

Подставляя значения \dot{R} и $v'_{ц.и}$ и обозначив энергии рассеиваемой частицы, отнесенные к лабораторной системе координат до и после соударения, соответственно через E_1 и E'_1 , находим

$$\frac{E'_1}{E_1} - \frac{2\mu}{m_2} \frac{\sqrt{E'_1}}{\sqrt{E_1}} \cos \theta_{л} - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = 0. \quad (43,33)$$

Уравнение (43,33) определяет зависимость E'_1 от угла рассеяния $\theta_{л}$ и масс частиц. Наибольшая потеря энергии имеет место при $m_1 = m_2$ и $\theta_{л} = \frac{\pi}{2}$ (при этом $\theta_{ц.и} = \pi$). В этом случае $E'_1 = 0$ и энергия полностью передается рассеивающей частице.

¹⁾ Подчеркнем, что это относится только к упругим столкновениям, так как при таких столкновениях относительная скорость до и после столкновения имеет значение v_0 .

Мы не останавливаемся на некоторых деталях теории рассеяния, изложение которых имеется в цитированных руководствах.

Перейдем теперь к расчету излучения, возникающего при пролете пучка заряженных частиц мимо неподвижных зарядов. Это явление, называемое тормозным излучением, служит для получения рентгеновских лучей (со сплошным спектром) и играет важную роль в механизме торможения частиц высоких энергий, движущихся в веществе.

Поскольку основной интерес представляют именно частицы высоких энергий, мы ограничимся этим случаем.

При достаточно большой энергии летящей частицы угол рассеяния ее мал, если исключить маловероятные процессы лобового соударения. Считая траекторию почти прямолинейной, можно упростить соответствующие формулы.

Рассмотрим прежде излучение одной частицы. Поместив начало координат в рассеивающий центр, можно написать следующее выражение для компонент сил, действующих на пролетающую частицу:

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{r^3} x, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{r^3} y. \quad (43,34)$$

Поскольку движение происходит в плоскости (x, y) , компонента силы F_z отсутствует.

Считая, что скорость движения частицы постоянна и не изменяется при рассеянии, а отклонение от прямолинейной траектории мало¹⁾, можно в формулах для компонент силы положить

$$x \approx vt, \quad y \approx \rho, \quad dt \approx \frac{dx}{v}. \quad (43,35)$$

Энергия, излучаемая частицей в телесный угол $d\Omega$ при пролете мимо рассеивающего центра, находится интегрированием формулы (28,11) (в которой нужно положить $m_2 \rightarrow \infty$) по времени пролета. С учетом (43,35) имеем

$$-\Delta E d\Omega = \int dI dt = \frac{1}{4\pi c^3} d\Omega \int [\ddot{\mathbf{n}}]^2 dt = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{e_1^2}{vm_1^2} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} [F\mathbf{n}]^2 dx.$$

Распишем выражение $[F\mathbf{n}]^2$. Имеем

$$\begin{aligned} [F\mathbf{n}]^2 &= F^2 - (F\mathbf{n})^2 = F_x^2 + F_y^2 - (F_x n_x + F_y n_y)^2 = \\ &= (1 - n_x^2) F_x^2 + (1 - n_y^2) F_y^2 - 2F_x F_y n_x n_y, \end{aligned}$$

где n_x и n_y — компоненты единичного вектора \mathbf{n} в направлении телесного угла $d\Omega$.

¹⁾ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, стр. 73.

Нам следует теперь вычислить три интеграла. Первый из них —

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2 dx = e_1^2 e_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{r^6} dx = 2e_1^2 e_2^2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \rho^2)^3}.$$

Полагая $\frac{x}{\rho} = \operatorname{tg} \varphi$, находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2 dx &= 2e_1^2 e_2^2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \rho^2)^3} = 2 \frac{e_1^2 e_2^2}{\rho^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(\operatorname{tg}^2 \varphi + 1)^3 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{2e_1^2 e_2^2}{\rho^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{e_1^2 e_2^2}{2\rho^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi e_1^2 e_2^2}{8\rho^3}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются второй и третий интегралы:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_y^2 dx &= 2e_1^2 e_2^2 \rho^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{r^6} = \frac{3e_1^2 e_2^2 \pi}{8\rho^3}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F_x F_y dx &= 0, \end{aligned}$$

так как $F_x F_y$ является нечетной функцией x . Окончательно,

$$\begin{aligned} -\Delta E d\Omega &= \frac{e_1^4 e_2^2}{32c^3 v m_1^2} \frac{1}{\rho^3} \{(1 - n_x^2) + 3(1 - n_y^2)\} d\Omega = \\ &= \frac{e_1^4 e_2^2}{32c^3 v m_1^2} \frac{1}{\rho^3} \{4 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \psi\} \sin \theta d\theta d\psi. \quad (43,36) \end{aligned}$$

Излучаемая энергия обратно пропорциональна скорости и кубу прицельного расстояния ρ и довольно сложным образом зависит от углов. Простое вычисление дает для полной излучаемой энергии

$$-\Delta E_{\text{полн}} = - \int \Delta E d\Omega = \frac{\pi}{3} \frac{e_1^4 e_2^2}{c^3 m_1^2 v} \frac{1}{\rho^3}. \quad (43,37)$$

На практике основной интерес представляет вычисление потери энергии быстрой заряженной частицы на единице пути в веществе. Рассеивающими центрами, отклоняющими частицу, являются ядра с зарядом $e_2 = Ze$, где Z — порядковый номер элемента, а e — заряд электрона (рассеянием на электронах

можно пренебречь). При рассеянии на каждом ядре частица излучает энергию, определяемую по формуле (43,37). Умножая (43,37) на число ядер на единице длины в цилиндре радиуса ρ , $\rho + d\rho$ и интегрируя по всем прицельным расстояниям, находим для потерь энергий

$$-\frac{dE}{dx} = - \int \Delta E_{\text{полн}} N 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi^2 e_1^4 Z^2 e^2 N}{3c^3 m_1^2 v} \int_{\rho_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2\pi^2 Z^2 e^2 e_1^4 N}{3c^3 m_1^2 v} \frac{1}{\rho_{\text{мин}}}, \quad (43,38)$$

где N — число ядер в 1 см^3 и $\rho_{\text{мин}}$ — некоторое минимальное значение прицельного расстояния.

Если бы не существовало минимального предельного расстояния, формула (43,38) приводила бы к бессмысленному результату: потери энергии частицы вследствие излучения на пути в веществе были бы бесконечно большими. В действительности, оказывается, однако, что законы классической физики становятся неприменимыми на малых расстояниях от ядра. Расчет минимального значения прицельного параметра может быть проведен только на основе квантовой механики (см. также § 17 ч. II).