Собственное время можно выразить через время в произвольной системе отсчета dt, т. е. через время, измеренное часами, движущимися по отношению к K' со скоростью $(-v)$, подставляя в (9,3) выражение для ds:

$$dt_0 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} =$$

$$= dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9,4)$$

Конечный промежуток собственного времени t_0 равен

$$t_0 = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt. \quad (9,5)$$

Следует подчеркнуть, что формула (9,5) выведена для случая движения часов вместе с инерциальной системой отсчета, т. е. движения с постоянной скоростью.

Часто формулу (9,5) применяют к ускоренному движению, считая v функцией времени. Нужно, однако, иметь в виду, что в специальной теории относительности не может рассматриваться ускоренное движение систем отсчета. Поэтому величина t_0, определенная формулой (9,5), в случае ускоренного движения не имеет смысла собственного времени, но является удобной величиной, инвариантной относительно преобразований Лоренца.

§ 10. Инвариантность физических законов относительно преобразований Лоренца. Четырехмерная формулировка теории относительности

Согласно принципу относительности все физические законы — законы механики, электродинамики, статистической физики и т. д., должны быть одними и теми же во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что все законы физики должны быть сформулированы таким образом, чтобы они оставались инвариантными относительно преобразований Лоренца. Соотношения, инвариантные относительно преобразований Лоренца, мы будем в дальнейшем именовать релятивистски- или лоренц-инвариантными.

Уравнения механики, инвариантные относительно преобразований Галилея, не удовлетворяют, очевидно, требованию инвариантности относительно преобразований Лоренца и, следовательно, должны быть видоизменены. Наоборот, законы электродинамики — уравнения Максвелла, как это будет показано позднее, уже с самого начала были сформулированы так, что они оказались релятивистски-инвариантными. С точки зрения теории относительности, уравнения Максвелла являются образцом «правильно сформулированного» физического закона.

Реализация общей программы, поставленной теорией относительности, — нахождение релятивистски-инвариантной формы физических законов, оказало большое влияние на все дальнейшее развитие физики. Так, например, прогресс, достигнутый в течение последних десятилетий в области квантовой механики и особенно в области квантовой теории поля, был тесно связан с выполнением этой программы теории относительности.

Следует заметить, что требование инвариантности физических законов относительно некоторых преобразований систем координат не является специфической особенностью теории относительности. Хорошо известно, что требование инвариантности физических законов относительно поворота системы непосредственно связано с изотропией пространства.

Действительно, всякий физический закон формулируется так, что входящие в него величины относятся к некоторой системе координатных осей. Ясно, что при этом содержание физического закона не может зависеть от ориентации координатных осей в пространстве. Например, уравнения Ньютона

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z \tag{10,1}$$

не зависят от того, как ориентирована в пространстве система координатных осей (x, y, z), к которой относятся проекции сил и ускорений. При любом повороте осей этой системы координат уравнения движения остаются неизменными: при повороте каждая из проекций ускорения и силы преобразуется по одному и тому же закону, так что равенства (10,1) не нарушаются. Это свойство инвариантности физических законов относительно поворота системы координат может быть более точно сформулировано следующим образом: в классической физике все физические законы формулируются в виде равенств типа

$$\alpha = \beta \tag{10,2}$$

или

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}. \tag{10,3}$$

$$\alpha_{ik} = \beta_{ik}. \tag{10,4}$$

Первое из них содержит связь между скалярными величинами, которые остаются неизменными при повороте координатных осей. Второе связывает между собой векторные величины. При повороте координатных осей векторные величины изменяются. Именно, если для простоты записи ограничиться поворотом вокруг оси z на угол φ, то x-я и y-я компоненты любых векторов изменяются по известным формулам аналитической геометрии:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned} \tag{10,5}$$

Поскольку, однако, по этому закону изменяются компоненты любых векторов, в частности, векторов ускорения и силы, равенство (10,3) (или равенство (10,1), являющееся его частным случаем) не нарушается.

Последнее равенство показывает в общем виде, что тензорная размерность величин, стоящих в обеих частях равенства, сохраняется.

Таким образом, всякий физический закон должен быть сформулирован так, чтобы он содержал только величины одинаковой тензорной размерности. В классической механике законы преобразования координат, которые должны оставлять неизменными физические законы, сводятся к следующим:

1) Инвариантность относительно преобразования Галилея.

2) Инвариантность относительно пространственных переносов и поворотов системы координат (10,5).

3) Инвариантность относительно замены t на $(t+\Delta t)$, выражающая однородности течения времени.

4) Инвариантность относительно замены знака времени, указывающая на обратимость законов механики, симметричных относительно будущего и прошедшего.

Теория относительности вместо условия 1) выдвигает более общее требование инвариантности физических законов относительно преобразований Лоренца. Такую инвариантность мы часто будем именовать релятивистской инвариантностью. Условия 2)—4) сохраняются и в теории относительности.

На первый взгляд может показаться, что разнообразие физических законов и фигурирующих в них физических величин исключает общий подход к установлению их релятивистски-инвариантных формулировок. В действительности, однако, это не так.

Для нахождения общего метода составления релятивистски-инвариантных выражений вновь обратимся к выражению для интервала ds.

Введем совершенно формально величину

$$\tau = ict, \tag{10,6}$$

которую мы будем называть четвертой координатой или мнимым временем. Само собой разумеется, что τ, как величина мнимая, не имеет непосредственного физического смысла.

С помощью мнимого времени интервал можно представить в виде

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2. \tag{10,7}$$

В этих обозначениях преобразования Лоренца допускают новую интерпретацию.

Будем считать, пока не вдаваясь в физическое содержание нашего рассмотрения, величины x, y, z, τ ортогональными координатами в некотором воображаемом четырехмерном пространстве.

Преобразование Лоренца представляет такое линейное преобразование четырех координат (x, y, z, τ), которое оставляет неизменной величину ds^2. Нетрудно заметить, что с геометрической точки зрения величина ds^2 представляет квадрат расстояния между двумя точками в четырехмерном пространстве. Следовательно, преобразование Лоренца является таким линейным преобразованием, которое оставляет неизменным расстояние между двумя произвольными точками в этом пространстве. Из геометрии известно, что существует только два таких линейных преобразования: преобразование параллельного переноса и вращение. Параллельный перенос представляет тривиальное преобразование, сводящееся к изменению начала отсчета системы кординат x, y, z, t. Поэтому единственным линейным преобразованием, оставляющим неизменной величину интервала, является поворот в четырехмерном пространстве (x, y, z, t).

Ниже мы подтвердим этот вывод непосредственным вычислением.

Такая геометрическая интерпретация преобразования Лоренца, принадлежащая Минковскому, позволяет непосредственно сделать вывод о релятивистски-инвариантной форме физических законов.

Именно, для того чтобы некоторое выражение было релятивистски-инвариантным, оно должно иметь вид

$$a = b, \tag{10,8}$$

где a и b.— скаляры, или

$$a_\alpha = b_\alpha, \tag{10,9}$$

где a_α и b_α — четырехмерные векторы, имеющие четыре компоненты $(\alpha = x, y, z, \tau)$, и в общем случае

$$a_{\alpha\beta\gamma\ldots} = b_{\alpha\beta\gamma\ldots}, \tag{10,10}$$

где $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ и $b_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ — четырехмерные тензоры произвольного ранга. При поворотах координатных осей в пространстве (x, y, z, τ) все величины, входящие в релятивистски-инвариантное выражение, преобразуются по одному и тому же закону, так что равенства типа (10,8)—(10,10) не нарушаются. Эти условия инвариантности в случае четырехмерного пространства Минковского представляют непосредственный аналог условий инвариантности при повороте системы координат в реальном трехмерном пространстве.

Необходимо подчеркнуть, что введение представления о четырехмерном пространстве с координатами x, y, z, τ имеет формальный характер. Оно отнюдь не равнозначно утверждению о существовании реального пространства четырех измерений.

Временная координата τ является чисто мнимой величиной, что подчеркивает ее особый характер и принципиальное отличие от пространственных координат x, y, z. Тем не менее, введение временной координаты τ имеет глубокий физический смысл. Оно указывает на неразрывную сьязь пространства и времени, о которой мы уже говорили ранее.

В дальнейшем мы должны будем привести к релятивистски-инвариантному виду ряд важных физических законов и соотношений. Для этого необходимо найти их четырехмерное обобщение. Как именно это следует делать, будет видно на конкретных примерах.

Предварительно убедимся, что преобразование поворота в четырехмерном пространстве (x, y, z, τ) идентично преобразованию Лоренца. Для простоты записи мы будем, как и прежде, считать, что движение инерциальных систем координат совершается в направлении совмещенных осей x и x'. При четырехмерной интерпретации это отвечает повороту в плоскости (x, τ) при неизменной ориентации осей (y, z).

Если обозначить через φ угол поворота, то аналогично (10,5) можно написать связь между исходными координатами (x, τ) и преобразованными координатами (x', τ'):

$$x = x' \cos\varphi - \tau' \sin\varphi, \tag{10,11}$$

$$\tau = \tau' \cos\varphi + x' \sin\varphi. \tag{10,12}$$

Угол поворота φ должен, очевидно, быть различным при разных значениях скорости v. Напишем преобразования (10,11) и (10,12) для начала координат системы K', т. е. точки $x' = 0$. Имеем, очевидно,

$$x = -\tau' \sin\varphi,$$

$$\tau = \tau' \cos\varphi.$$

Разделив верхнее выражение на нижнее, получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x}{\tau},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = i\frac{x}{ct} = i\frac{v}{c}, \tag{10,13}$$

где v — скорость равномерного движения начала координат системы K' (точки $x' = 0$) относительно системы координат K. Из равенства (10,13) можно без труда найти значения величин $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, входящих в формулы (10,11) и (10,12):

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

При этом

$$x = \frac{x' - i\frac{v}{c}\tau'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{10,14}$$

$$\tau = \frac{\tau' + i\frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10,15}$$

Переходя от τ к времени t, мы видим, что формулы (10,14) и (10,15) совпадают с преобразованиями Лоренца.

Нелишне подчеркнуть условный характер графического изображения преобразований Лоренца. Угол поворота на рис. 23 является мнимым. Разумеется, изобразить поворот на мнимый угол мы не можем. Достоинства и недостатки графического представления преобразования Лоренца ясно видны из нижеследующего рассмотрения. Пусть в системе K' в некоторой точке x' покоятся часы. Это физическое событие в момент времени τ_1' изобразится первой точкой, в момент времени τ_2' — второй точкой на оси τ'. Промежуток времени $\Delta\tau'$ равен длине участка от точки 1 до точки 2. При переходе к системе K (повороте на угол φ) отрезок $\Delta\tau'$ переходит в отрезок $\Delta\tau$ на оси τ. Мы ясно видим, что бессмысленно говорить о том, какая система отсчета является более правильной и какой из промежутков времени, $\Delta\tau$ или $\Delta\tau'$, является истинным промежутком времени между двумя физическими событиями. Недостатком геометрического рассмотрения является то, что взаимоотношение между $\Delta\tau$ и $\Delta\tau'$

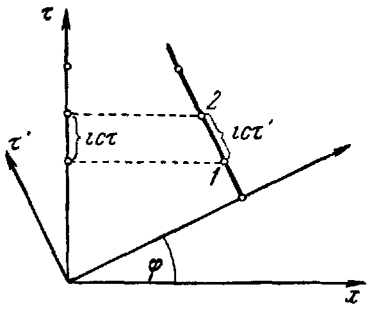

Рис. 23.

на чертеже является обратным истинному: на чертеже $\Delta\tau$ меньше, чем $\Delta\tau'$, в действительности же он больше в отношении $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Искажение возникает потому, что мы не можем изобразить на рисунке мнимое значение угла φ и заменяем его вещественным углом.

Аналогичную геометрическую интерпретацию допускают преобразование длины (рис. 24) и теорема сложения скоростей Эйнштейна. Сложению скоростей v_1 и v_2 соответствуют два последовательных поворота в плоскости (x, τ): повороту на угол φ_1 отвечает переход от системы K к системе K', движущейся со скоростью v_1 по отношению к K; повороту на угол φ_2 соответствует переход от системы K' к системе K'', имеющей скорость v_2 относительно K'. Следовательно, переходу от K к K'', т. е. сложению скоростей v_1 и v_2, отвечает поворот в пространстве (x, τ) на угол

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

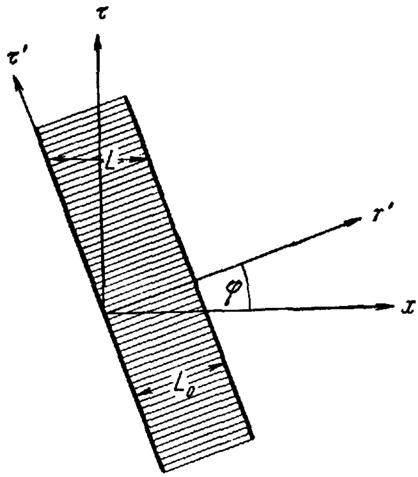

Рис 24.

Скорости v_1 и v_2 связаны с углами поворота φ_1 и φ_2 соотношением (10,13), в которое входит тангенс угла поворота. Углу φ отвечает $\operatorname{tg}\varphi$, равный

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Подставляя в последнее соотношение значения $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2$ из (10,13), легко прийти к теореме сложения скоростей Эйнштейна.

§ 11. Четырехмерные векторы и тензоры. Четырехмерные скорость и ускорение

Мы перейдем теперь к составлению четырехмерных векторов, которые согласно результатам предыдущего параграфа должны фигурировать в релятивистски-инвариантных выражениях.