на чертеже является обратным истинному: на чертеже $\Delta\tau$ меньше, чем $\Delta\tau'$, в действительности же он больше в отношении $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Искажение возникает потому, что мы не можем изобразить на рисунке мнимое значение угла φ и заменяем его вещественным углом.

Аналогичную геометрическую интерпретацию допускают преобразование длины (рис. 24) и теорема сложения скоростей Эйнштейна. Сложению скоростей v_1 и v_2 соответствуют два последовательных поворота в плоскости (x, τ): повороту на угол φ_1 отвечает переход от системы K к системе K', движущейся со скоростью v_1 по отношению к K; повороту на угол φ_2 соответствует переход от системы K' к системе K'', имеющей скорость v_2 относительно K'. Следовательно, переходу от K к K'', т. е. сложению скоростей v_1 и v_2, отвечает поворот в пространстве (x, τ) на угол

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

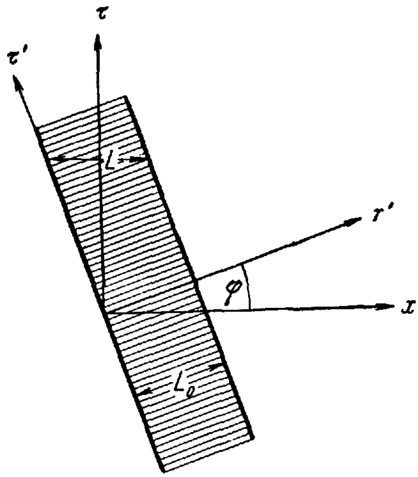

Рис 24.

Скорости v_1 и v_2 связаны с углами поворота φ_1 и φ_2 соотношением (10,13), в которое входит тангенс угла поворота. Углу φ отвечает $\operatorname{tg}\varphi$, равный

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Подставляя в последнее соотношение значения $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2$ из (10,13), легко прийти к теореме сложения скоростей Эйнштейна.

§ 11. Четырехмерные векторы и тензоры. Четырехмерные скорость и ускорение

Мы перейдем теперь к составлению четырехмерных векторов, которые согласно результатам предыдущего параграфа должны фигурировать в релятивистски-инвариантных выражениях.

Введем, прежде всего, четырехмерный радиус-вектор r_α ($\alpha=1, 2, 3, 4$) — вектор, проекции которого на взаимно ортогональные оси координат равны x, y, z, τ.

При преобразовании Лоренца — повороте в четырехмерном пространстве — компоненты вектора r_α преобразуется по закону

$$r_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} r'_\beta,$$

так чтобы квадрат вектора r_α^2 оставался инвариантным:

$$r_\alpha^2 = r_\alpha r_\alpha = x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2 = \text{const}.$$

Для этого коэффициенты преобразования Лоренца должны, очевидно, удовлетворять требованию

$$\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} = \delta_{\beta\lambda},$$

часто именуемому условием ортогональности. Действительно, при этом имеем

$$r_\alpha^2 = (\gamma_{\alpha\beta} r'_\beta)(\gamma_{\alpha\lambda} r'_\lambda) = \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} r'_\beta r'_\lambda = \delta_{\beta\lambda} r'_\beta r'_\lambda = (r'_\beta)^2.$$

Это требование накладывает существенное ограничение на коэффициенты преобразования $\gamma_{\alpha\beta}$. В частном случае, когда преобразование Лоренца отвечает вращению в плоскости $(x_\lambda \tau)$, при неизменных значениях y и z, для $\gamma_{\alpha\beta}$ легко написать, пользуясь (10,14) и (10,15):

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{vmatrix}. \qquad (11,1)$$

Обобщим определение вектора r_α на случай произвольного 4-вектора. По определению, 4-вектором a_α называется совокупность величин (проекций) a_x, a_y, a_z, a_τ, которые при преобразованиях Лоренца — повороте осей в четырехмерном пространстве — преобразуются по тому же закону, что и компоненты радиуса-вектора r_α, т. е. по закону

$$a_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} a'_\beta.$$

Если ограничиться поворотами в ($x\tau$)-плоскости, то, пользуясь определением $\gamma_{\alpha\beta}$ (или аналогией с (10,14) и (10,15)), можно написать закон преобразования в виде

$$a_x = \frac{a'_x - i\frac{v}{c}a'_\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11,2}$$

$$a_y = a'_y, \qquad a_z = a'_z, \tag{11,3}$$

$$a_\tau = \frac{a'_\tau + i\frac{v}{c}a'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{11,4}$$

Для четырехмерных векторов, как и для трехмерных, можно ввести понятие скалярного произведения

$$c = a_\alpha \cdot b_\alpha = \boldsymbol{ab} + a_\tau b_\tau,$$

где c — скалярная величина. Векторы a_α и b_α называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Мы не касаемся других векторных алгебраических операций, поскольку они не понадобятся нам в дальнейшем.

Важной характеристикой 4-вектора является скаляр, отвечающий квадрату вектора, т. е. скалярному произведению:

$$a_\alpha \cdot a_\alpha = a_\alpha^2 = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z + a_\tau a_\tau = \text{invar}. \tag{11,5}$$

Инвариантность a_α^2 непосредственно ясна из геометрических соображений: преобразования Лоренца являются поворотом в четырехмерном пространстве.

Квадрат 4-вектора как и квадрат 4-радиуса-вектора r_α^2, не является существенно положительным. Если квадрат вектора $a_\alpha^2 > 0$, то a_α мы будем именовать пространственноподобным вектором. Вектор, у которого $a_\alpha^2 < 0$, именуется времениподобным.

Рассмотрим определение двух важных 4-векторов: 4-вектора скорости и 4-вектора ускорения.

Мы должны построить такой 4-вектор скорости, который образуется в виде производной от 4-радиуса-вектора по некоторому инварианту — скаляру. Выбор этого скаляра определяется тем, что при малых скоростях $v \ll c$ пространственные компоненты 4-вектора скорости должны превращаться в компоненты обычной скорости.

В силу сказанного, естественно определить 4-вектор скорости соотношением

$$u_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_0}. \tag{11,6}$$

Для компонент 4-скорости имеем

$$u_x = \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11,7}$$

$$u_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11,8}$$

$$u_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11,9}$$

$$u_\tau = \frac{d\tau}{dt_0} = \frac{ic\,dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{11,10}$$

При $v \ll c$ три пространственные компоненты скорости совпадают с компонентами обычной трехмерной скорости. Четвертая компонента скорости u является чисто мнимой. С точностью до множителя (ic) она представляет коэффициент перехода от собственного времени dt_0 к времени dt.

Важной особенностью 4-вектора скорости является то, что его компоненты не являются независимыми друг от друга. Действительно, составив квадрат вектора u_α^2, находим

$$u_\alpha^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_\tau^2 = -c^2. \tag{11,11}$$

Таким образом, 4-вектор скорости является времениподобным вектором, а его абсолютная величина является заданной постоянной. Это свойство 4-вектора связано, разумеется, с тем, что скорость движения материальных тел не может превышать скорость света.

Определим теперь четырехмерное ускорение w_α как

$$w_\alpha = \frac{du_\alpha}{dt_0}. \tag{11,12}$$

Выражая w_α через скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\dot{\boldsymbol{v}}$, находим его компоненты:

$$w_x = \frac{du_x}{dt}\frac{dt}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dot{v}_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_x(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \quad (11{,}13)$$

$$w_y = \frac{\dot{v}_y}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_y(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \quad (11{,}14)$$

$$w_z = \frac{\dot{v}_z}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_z(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \quad (11{,}15)$$

$$w_\tau = \frac{dt}{dt_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{i}{c}\frac{v\dot{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \quad (11{,}16)$$

Простое вычисление показывает, что квадрат четырехмерного ускорения равен

$$w_\alpha^2 = \frac{\dot{v}^2 - \left[\frac{\boldsymbol{v}}{c}, \dot{\boldsymbol{v}}\right]^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3} > 0. \quad (11{,}17)$$

Таким образом 4-ускорение представляет пространственно-подобный вектор.

Дифференцируя равенства (11,11) по t_0, находим

$$u_\alpha \frac{du_\alpha}{dt_0} = u_\alpha w_\alpha = 0. \quad (11{,}18)$$

Последнее равенство означает, что векторы u_α и w_α ортогональны друг к другу в четырехмерном пространстве.

Наряду с определением 4-векторов можно ввести 4-тензоры. 4-тензором второго ранга называется совокупность величин $A_{\alpha\beta}$, которые преобразуются как произведение двух векторов $a_\alpha \cdot b_\beta$, т. е.

$$A_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu}A'_{\lambda\mu}. \quad (11{,}19)$$

Тензор $A_{\alpha\beta}$ представляет совокупность шестнадцати величин (вместо девяти у тензора второго ранга в трехмерном пространстве). Как и у 4-вектора, τ-компоненты 4-тензора, т. е. величины $A_{\alpha\tau}$, являются чисто мнимыми, а все остальные — вещественными. Всякий тензор $A_{\alpha\beta}$ можно разложить на симметричную и антисимметричную (относительно перестановки значков) части, написав

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) = A^{s}_{\alpha\beta} + A^{as}_{\alpha\beta}.$$

Нетрудно видеть, что

$$A^{s}_{\alpha\beta} = A^{s}_{\beta\alpha},$$
$$A^{as}_{\alpha\beta} = -A^{as}_{\alpha\beta}.$$

Преобразования Лоренца оставляют это разбиение неизменным.

Важную роль в дальнейшем будут играть чисто антисимметричные тензоры. Из условия антисимметрии вытекает, что у таких тензоров имеется шесть независимых компонент, и их можно представить в виде таблицы

$$A^{as}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & A_{xy} & A_{xz} & A_{x\tau} \\ -A_{xy} & 0 & A_{yz} & A_{y\tau} \\ -A_{xz} & -A_{yz} & 0 & A_{z\tau} \\ -A_{x\tau} & -A_{y\tau} & -A_{z\tau} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (11,20)$$

Пользуясь свойствами величин $\gamma_{\alpha\beta}$, можно найти закон преобразования компонент 4-тензора. Мы ограничимся случаем антисимметричного тензора и подробно распишем одну из компонент

$$A_{xy} = \gamma_{x\lambda}\gamma_{y\mu}A'_{\lambda\mu} = \gamma_{xx}\gamma_{yy}A'_{xy} + \gamma_{x\tau}\gamma_{yy}A'_{\tau y} = \frac{A'_{xy} - i\frac{v}{c}A'_{y\tau}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Остальные слагаемые обращаются в нуль в силу определения $\gamma_{\alpha\beta}$ и $A^{as}_{\alpha\beta}$. Закон преобразования других компонент легко найти таким же способом. В результате для преобразования компонент антисимметричного тензора получим

$$A_{xy} = \frac{A'_{xy} - i\frac{v}{c}A'_{y\tau}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad A_{x\tau} = A'_{x\tau},$$

$$A_{xy} = \frac{A'_{xz} - i\frac{v}{c}A'_{z\tau}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad A_{y\tau} = \frac{A'_{y\tau} + i\frac{v}{c}A'_{xy}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (11,21)$$

$$A_{yz} = A'_{yz}, \qquad A_{z\tau} = \frac{A'_{z\tau} + i\frac{v}{c}A'_{xz}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Важной характеристикой 4-тензоров являются их инварианты, т. е. комбинации, остающиеся инвариантными при преобразованиях Лоренца. У антисимметричных тензоров второго ранга, которые нам понадобятся в дальнейшем, инвариантами являются скалярные величины:

1) Произведение $A_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$ (квадратичный инвариант).

2) Произведение $A_{\alpha\gamma}A_{\gamma\mu}A_{\mu\alpha}$ (кубический инвариант).

3) Произведение $A_{\alpha\lambda}A_{\lambda\mu}A_{\mu\nu}A_{\nu\alpha}$ (биквадратный инвариант).

Остальные скалярные соотношения выражаются через эти три инварианта или равны нулю. Так, например, скаляр $A_{\alpha\alpha}$, представляющий сумму диагональных элементов, равен нулю при антисимметричных тензорах.