ГЛАВА II

МЕХАНИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 12. Уравнения динамики материальной точки

Перейдем теперь к рассмотрению динамики материальной точки в теории относительности.

Как и в классической механике, под материальной точкой понимают тело, размерами которого можно пренебречь. Часто, имея в виду физические приложения, мы будем говорить не о *движении материальной точки*, а о *движении частицы*.

Прежде всего заметим, что закон инерции Ньютона является инвариантным относительно преобразований Лоренца. Действительно, если в некоторой инерциальной системе координат K частица движется неускоренно, то при линейном преобразовании координат к другой системе K' движение ее также останется неускоренным. Однако уравнения динамики, инвариантные относительно преобразования Галилея, не обладают свойствами инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Для нахождения релятивистски-инвариантной формы уравнений динамики их необходимо представить в виде четырехмерного соотношения типа (10,9).

Инерционные свойства тела или частицы можно охарактеризовать некоторым скаляром — инвариантной массой или массой покоя m. Значение массы покоя является константой, характерной для каждого вида элементарных частиц. 4-импульс частицы p_α определим как

$$p_\alpha = m u_\alpha. \qquad (12,1)$$

В компонентах имеем

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{m v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, & p_y &= \frac{m v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ p_z &= \frac{m v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, & p_\tau &= \frac{icm}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12,2)$$

В предельном случае $v \ll c$ три пространственные компоненты импульса переходят в обычные компоненты импульса частицы:

$$p_x = mv_x; \quad p_y = mv_y; \quad p_z = mv_z.$$

Естественным релятивистским обобщением уравнений динамики Ньютона являются уравнения

$$\frac{dp_\alpha}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} mu_\alpha = F_\alpha, \tag{12,3}$$

где F_α — некоторый четырехмерный вектор, именуемый четырехмерной силой или силой Минковского, и α пробегает значения x, y, z, τ. Релятивистски-инвариантный характер уравнений (12,3) непосредственно следует из сказанного в § 11: в правую и левую части (12,3) входят четырехмерные векторы, изменяющиеся при четырехмерном повороте (преобразовании Лоренца) по одному и тому же закону, и скаляр m, не изменяющийся вовсе.

В дальнейшем соотношения (12,3) мы будем именовать уравнениями релятивистской динамики.

Распишем уравнения релятивистской динамики в компонентах. Имеем

$$\frac{dp_x}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{12,4}$$

При $v \ll c$ уравнение (12,4) должно превращаться в обычное уравнение Ньютона.

В левой части формулы (12,4) стоит производная от импульса по обычному времени. Потребуем, чтобы в правой части уравнения (12,4) стояла компонента обычной силы $\mathcal{F}_x$. Следовательно, компонента 4-силы F_x связана с обычной силой $\mathcal{F}_x$ классической механики соотношением

$$F_x \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \mathcal{F}_x. \tag{12,5}$$

Тогда формула (12,4) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathcal{F}_x. \tag{12,6}$$

При $v \ll c$ формула (12,6) превращается в уравнение Ньютона.

Аналогичные соотношения можно написать для двух других пространственных компонент:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathcal{F}_y, \tag{12,7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathcal{F}_z. \tag{12,8}$$

Напишем теперь четвертую компоненту соотношения (12,3). Пользуясь (11,10), находим

$$\frac{d}{dt}\frac{icm}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=F_\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{12,9}$$

Для нахождения физического смысла компоненты 4-силы F_τ умножим (12,3) скалярно на u_α и просуммируем по всем компонентам α $(\alpha = x, y, z, \tau)$.

Имеем, очевидно, в силу (11,18)

$$u_\alpha\frac{dmu_\alpha}{dt_0}=F_\alpha u_\alpha=0$$

или

$$F_x u_x+F_y u_y+F_z u_z+F_\tau u_\tau=0.$$

Подставляя сюда значения F_x, F_y, F_z, u_x, u_y, u_z и u_τ, имеем

$$\mathcal{F}_x\frac{v_x}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}+\mathcal{F}_y\frac{v_y}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}+$$

$$+\mathcal{F}_z\frac{v_z}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}+F_\tau\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0.$$

Отсюда следует, что

$$F_\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{i}{c}\mathcal{F}v.$$

Правая сторона последнего уравнения содержит работу, производимую силой $\mathcal{F}$ над частицей в единицу времени. Таким образом, компонента 4-силы F_τ оказывается связанной с работой трехмерной силы $\mathcal{F}$:

$$F_\tau=\frac{i}{c}\frac{\mathcal{F}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12,10}$$

Пользуясь (12,10), представим (12,9) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathcal{F}v. \qquad (12,11)$$

В правой части (12,11) произведение $\mathcal{F}v$ дает работу силы над частицей, произведенную в единицу времени. Следовательно, в левой части этого уравнения стоит изменение энергии в единицу времени.

Мы определим, таким образом, полную энергию частицы как

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (12,12)$$

Найдем, наконец, выражение для ускорения. Уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathcal{F}$$

или

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}=\mathcal{F}. \qquad (12,13)$$

С помощью (12,11) можно переписать (12,13) в виде

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left\{\mathcal{F}-\frac{v}{c^2}(\mathcal{F}v)\right\}. \qquad (12,14)$$

§ 13. Импульс, энергия и масса в релятивистской механике

Обсудим теперь свойства введенных в предыдущем параграфе механических величин — массы покоя, импульса и энергии.

Связь между массой покоя m и трехмерным импульсом p определяется согласно (12,2) соотношением

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (13,1)$$