Пользуясь (12,10), представим (12,9) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathscr{F}v. \tag{12,11}$$

В правой части (12,11) произведение $\mathscr{F}v$ дает работу силы над частицей, произведенную в единицу времени. Следовательно, в левой части этого уравнения стоит изменение энергии в единицу времени.

Мы определим, таким образом, полную энергию частицы как

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12,12}$$

Найдем, наконец, выражение для ускорения. Уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathscr{F}$$

или

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}=\mathscr{F}. \tag{12,13}$$

С помощью (12,11) можно переписать (12,13) в виде

$$\boldsymbol{w}=\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left\{\mathscr{F}-\frac{v}{c^2}(\mathscr{F}\boldsymbol{v})\right\}. \tag{12,14}$$

§ 13. Импульс, энергия и масса в релятивистской механике

Обсудим теперь свойства введенных в предыдущем параграфе механических величин — массы покоя, импульса и энергии.

Связь между массой покоя m и трехмерным импульсом p определяется согласно (12,2) соотношением

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{13,1}$$

которое при $v \ll c$ совпадает с обычным выражением классической механики. Отсюда, казалось бы, можно было заключить, что скаляр m совпадает с массой тела, движущегося с малой скоростью.

Однако, как будет видно из дальнейшего, свойства инвариантной массы (массы покоя) m существенно отличаются от тех, которые приписываются массе в классической механике. Именно, масса покоя не удовлетворяет закону сохранения. Существуют физические процессы, при которых масса покоя частиц до начала процесса не равна массе частиц, остающихся после окончания процесса.

Примеры такого рода явлений будут приведены ниже. Необычность (с точки зрения представлений о массе в классической механике) и возможность несохранения массы покоя m особенно ясны из того факта, что наличие массы покоя не является обязательным свойством частиц.

Именно, не подлежит сомнению существование в природе элементарных частиц, масса покоя которых равна нулю. Такими частицами являются световые кванты (фотоны). По всей совокупности имеющихся экспериментальных (см. § 16) и теоретических данных частицами с массой покоя, равной нулю, являются нейтрино — нейтральные частицы, играющие важную роль в ядерных процессах (в частности, возникающие при β-распаде).

Ясно, что если в процессах взаимного превращения, которые играют важнейшую роль в мире элементарных частиц, имеются процессы перехода частиц с массой покоя, отличной от нуля, в частицы с массой покоя, равной нулю, то масса покоя не сохраняется. Такие процессы действительно происходят в природе и некоторые из них хорошо изучены. Соответствующие примеры будут приведены в § 16.

Несмотря на свои необычные свойства, масса покоя является весьма важной характеристикой тел.

Каждая элементарная частица имеет вполне определенное, не изменяющееся от экземпляра к экземпляру значение массы покоя (включая и значение, равное нулю). Поэтому масса покоя является фундаментальной характеристикой элементарной частицы.

Точно так же, как о массе покоя элементарной частицы, можно говорить о массе покоя тела, состоящего из многих элементарных частиц. Если пренебречь размерами тела, можно считать его материальной точкой с массой покоя m. Вопрос о том, как связана масса покоя тела с массами покоя образующих его частиц, будет обсуждаться ниже.

Часто наряду с массой покоя вводят массу $m(v)$, именуемую релятивистской массой или просто массой и определяемую как коэффициент пропорциональности между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{p}=m(v)\,\boldsymbol{v}, \tag{13,2}$$

где

$$m(v)=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13,3}$$

Релятивистская масса зависит от скорости и потому является функцией не только свойств частицы, но и состояния ее движения.

Нужно, однако, подчеркнуть, что релятивистская масса $m(v)$ не является релятивистски-инвариантной величиной. Действительно, величина $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ не является инвариантной (закон преобразования $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ проще всего найти из (9,4), учитывая, что dl_0 — инвариант, а закон преобразования времени dt известен).

Если некоторая частица движется по отношению к двум системам отсчета с различными скоростями, то ее масса, измеренная приборами, находящимися в этих системах отсчета, будет различной.

Энергия частицы была определена соотношением (12,12). Прежде чем перейти к обсуждению этого соотношения, заметим, что из (12,12) и (12,2) вытекает следующее важное соотношение, связывающее временну́ю компоненту 4-вектора импульса и энергию

$$p_\tau=i\frac{E}{c}. \tag{13,4}$$

Таким образом p_τ с точностью до постоянного множителя совпадает с энергией частицы. Важность соотношения (13,4) заключается в том, что с его помощью импульс и энергия оказываются объединенными в один 4-вектор, который можно назвать 4-вектором энергии и импульса:

$$p_\alpha=\left(p_x,\ p_y,\ p_z,\ i\frac{E}{c}\right). \tag{13,5}$$

Компоненты 4-вектора энергии и импульса не являются релятивистски-инвариантными величинами. Как трехмерный импульс, так и энергия оказываются относительными величинами. При переходе от одной инерциальной системы к другой компоненты 4-вектора энергии и импульса преобразуются по формулам (11,1)—(11,4), т. е.

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{E'}{c^2} v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{13,6}$$

$$p_y = p'_y, \tag{13,7}$$

$$p_z = p'_z, \tag{13,8}$$

$$E = \frac{p_\tau c}{i} = \frac{E' + v p'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13,9}$$

Эти соотношения показывают, что при преобразованиях Лоренца энергия и компоненты импульса выражаются друг через друга. Инвариантной величиной является не энергия и импульс порознь, но, как всегда, квадрат 4-вектора, т. е. величина

$$p_a^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + p_\tau^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = \text{invar}. \tag{13,10}$$

Подставляя в (13,10) значения компонент импульса (12,2) и энергии (12,12), можно легко вычислить значение этого инварианта, которое оказывается равным

$$I = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2. \tag{13,11}$$

Таким образом, 4-вектор энергии и импульса является времениподобным вектором.

Вернемся теперь к определению энергии частицы (12,12). При $v \ll c$ формула (12,12) переходит в

$$E = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right) \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \tag{13,12}$$

Второе слагаемое совпадает с кинетической энергией частицы в классической механике. Однако при $v=0$ энергия частицы вне поля сил

$$E_0 = mc^2 \tag{13,13}$$

оказывается отличной от нуля.

На первый взгляд могло бы показаться, что такое определение энергии является произвольным. Поскольку энергия найдена из дифференциального соотношения (12,11), ее можно определить как

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{const} \tag{13,14}$$

Если выбрать произвольную постоянную равной $(-mc^2)$, то определенная таким образом энергия при $v \ll c$ будет совпадать с энергией частицы в классической механике.

В действительности, однако, легко показать, что const следует положить равной нулю, как это сделано в (12,12). Мы не можем заранее требовать, чтобы все без исключения величины релятивистской механики приобретали классический вид при $v \ll c$. Однако во всяком случае несомненно, что при $v \ll c$ преобразования Лоренца должны совпасть с преобразованиями Галилея, и, следовательно, должен иметь место обычный закон сложения скоростей. Для того чтобы преобразование (13,6) импульса при $v \ll c$ переходило в теорему сложения скоростей классической механики, должно выполняться условие $E' \to mc^2$. При этом из (13,6) следует

$$p_x = p'_x + mv$$

или

$$v_x = v'_x + v.$$

Если бы энергия была определена формулой (13,14), а не (12,12) и при $v \ll c$ стремилась к пределу $E' \to 0$, то преобразование Лоренца для скорости не переходило бы в формулу сложения скоростей классической механики.

Таким образом, теория относительности приводит к новому, весьма важному выводу: энергия покоящейся частицы равна mc^2. Величину mc^2 естественно назвать энергией покоя. Всякая частица или тело, обладающее массой покоя m, обладает вместе с тем энергией покоя mc^2.

Энергию движущейся частицы можно связать с релятивистской массой соотношением

$$E = m(v)c^2, \tag{13,15}$$

аналогичным (13,13).

Формулы (13,13) и (13,15), именуемые часто формулами Эйнштейна, показывают, что всякая частица, обладающая массой m, одновременно имеет энергию E. Энергия и масса неразрывно связаны между собой и пропорциональны друг другу. Часто это утверждение называют законом эквивалентности массы и энергии.

Не следует, разумеется, смешивать понятия эквивалентности и тождественности. Энергия и масса являются различными физическими характеристиками частиц, и закон эквивалентности устанавливает лишь их пропорциональность друг другу. Взаимоотношение между массой и энергией сходно с взаимоотношением между тяжелой и инертной массой в классической механике: обе массы неразрывно связаны между собой и пропорциональны друг другу, но являются вместе с тем разными характеристиками[1]).

В настоящее время как формула Эйнштейна (13,15), так и формулы (13,2) и (13,3) подтверждены обширнейшим опытным материалом и их достоверность не подлежит никакому сомнению.

Если на частицу не действуют внешние силы, то имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad E = \text{const} \tag{13,16}$$

и импульса

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \tag{13,17}$$

Из формулы Эйнштейна следует, что одновременно с законом сохранения энергии автоматически имеет место закон сохранения релятивистской массы

$$m(v) = \text{const}. \tag{13,18}$$

В отличие от классической физики, где существуют два независимых закона сохранения — закон сохранения энергии и закон сохранения массы, в теории относительности имеет место лишь один закон сохранения — закон сохранения энергии или релятивистской массы.

К физической интерпретации закона сохранения энергии в теории относительности мы вернемся еще в § 15—17.

В заключение укажем, что обычно E именуют полной энергией. Это не должно повести к недоразумениям: в E не включена потенциальная энергия частицы во внешнем поле, если таковое действует на частицы. Иногда вводят кинетическую энергию $E_{\text{кин}}$, определяя ее как энергию движения частицы, т. е.

$$E_{\text{кин}} = E - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = [m(v) - m]\,c^2. \tag{13,19}$$

Приведем еще полезную формулу, связывающую энергию и трехмерный импульс. Из (12,12) и (13,1) непосредственно следует

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}. \tag{13,20}$$

С помощью формулы (13,13) можно найти выражение классического радиуса электрона r_0, введенного в ч. I.

[1]) Подробнее см. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, 1955, стр. 144.

Мы обсуждали уже в § 18 ч. I фундаментальную трудность классической теории поля, связанную с проблемой собственной энергии электрона. Для энергии собственного поля электрона получается выражение

$$U = \frac{e}{r_0},$$

расходящееся при $r_0 \to 0$.

Если допустить, что вся масса электрона связана с массой создаваемого им поля, т. е. положить

$$U \sim mc^2$$

для покоящегося электрона, то для r_0 получается значение

$$r_0 \sim \frac{e^2}{mc^2},$$

совпадающее с неравенством (29,6) ч. I. Нужно, однако, иметь в виду, что проблема собственной энергии введением радиуса электрона отнюдь не разрешается.

Мы подчеркивали, что в теории относительности никакое тело, и в том числе электрон, нельзя рассматривать как идеально твердый шарик заданного радиуса. Поэтому величину r_0 нельзя трактовать как истинный «радиус» электрона. Это — минимальный размер области пространства, в которой еще можно пользоваться соотношениями классической теории поля, предел применимости ее понятий, заложенный в ней самой. Напомним, что, как было уже сказано в § 29 ч. I, фактически предел применимости классической теории поля наступает при значительно бо́льших пространственных масштабах.

§ 14. Уравнения Лагранжа; функции Лагранжа и Гамильтона

Как и в классической механике, уравнения движения можно записать в обобщенных координатах в форме уравнений Лагранжа. Для этого прежде всего следует составить функцию Лагранжа.

По определению, функция Лагранжа является величиной, производные от которой по координатам скорости представляют компоненты импульса, а производные по координатам — компоненты силы.

Имеем поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{14,1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \mathcal{F}_i = -\frac{\partial U_{\text{поля}}}{\partial x_i}, \tag{14,2}$$