Мы обсуждали уже в § 18 ч. I фундаментальную трудность классической теории поля, связанную с проблемой собственной энергии электрона. Для энергии собственного поля электрона получается выражение

$$U = \frac{e}{r_0},$$

расходящееся при $r_0 \to 0$.

Если допустить, что вся масса электрона связана с массой создаваемого им поля, т. е. положить

$$U \sim mc^2$$

для покоящегося электрона, то для r_0 получается значение

$$r_0 \sim \frac{e^2}{mc^2},$$

совпадающее с неравенством (29,6) ч. I. Нужно, однако, иметь в виду, что проблема собственной энергии введением радиуса электрона отнюдь не разрешается.

Мы подчеркивали, что в теории относительности никакое тело, и в том числе электрон, нельзя рассматривать как идеально твердый шарик заданного радиуса. Поэтому величину r_0 нельзя трактовать как истинный «радиус» электрона. Это — минимальный размер области пространства, в которой еще можно пользоваться соотношениями классической теории поля, предел применимости ее понятий, заложенный в ней самой. Напомним, что, как было уже сказано в § 29 ч. I, фактически предел применимости классической теории поля наступает при значительно бо́льших пространственных масштабах.

§ 14. Уравнения Лагранжа; функции Лагранжа и Гамильтона

Как и в классической механике, уравнения движения можно записать в обобщенных координатах в форме уравнений Лагранжа. Для этого прежде всего следует составить функцию Лагранжа.

По определению, функция Лагранжа является величиной, производные от которой по координатам скорости представляют компоненты импульса, а производные по координатам — компоненты силы.

Имеем поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{14,1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \mathcal{F}_i = -\frac{\partial U_{\text{поля}}}{\partial x_i}, \tag{14,2}$$

где $U_{\text{поля}}$ — потенциальная энергия внешнего поля, зависящая только от координат частицы. Уравнениям (14,1) и (14,2) удовлетворяет функция Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U_{\text{поля}}. \tag{14,3}$$

Мы видим, что в релятивистской механике функция Лагранжа не представляет более разности между кинетической энергией и потенциальной.

С помощью функции Лагранжа можно написать уравнения Лагранжа в обобщенных координатах q_i:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{14,4}$$

или $\frac{d}{dt}p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, где $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ — обобщенные импульсы.

Зная функцию Лагранжа, можно найти функцию Гамильтона H. Если функция Лагранжа явно от времени не зависит, то, по определению,

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + U_{\text{поля}} =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U_{\text{поля}}. \tag{14,5}$$

Скорость может быть выражена через импульс с помощью соотношений (12,2), из которых следует, что

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Простое вычисление дает

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + U_{\text{поля}}. \tag{14,6}$$

Формула (14.6) показывает, что в релятивистской механике функция Гамильтона совпадает с полной энергией, выраженной через импульс частицы.

При больших значениях импульса, когда $p \gg mc$, выражение для функции Гамильтона свободной частицы допускает важное упрощение:

$$H \approx pc. \tag{14,7}$$

Движение с таким большим импульсом, при котором справедлива приближенная формула (14,7), называется ультрарелятивистским. Совершенно ясно, что для частиц с массой покоя, равной нулю, формула (14,7) является точной. Мы будем ею неоднократно пользоваться при рассмотрении процессов с участием световых квантов (фотонов).

§ 15. Механика системы частиц в теории относительности

До сих пор мы ограничивались рассмотрением одной частицы. Построение механики системы частиц в теории относительности является гораздо более сложной задачей. Тем не менее и в последнем случае можно установить ряд важных общих законов.

Систему частиц как целое можно характеризовать ее энергией E, импульсом $\boldsymbol{P}$ и массой покоя M. Если нас интересует движение системы как целого, то, пренебрегая внутренними процессами в системе и ее пространственной протяженностью, можно считать систему одной материальной точкой. Для системы как целого можно написать равенство

$$E = Mc^2, \tag{15,1}$$

где M — масса покоя всей системы. Поскольку всегда $M > 0$, энергия системы частиц, как и энергия одной свободной частицы, является существенно положительной величиной.

Однако невозможно в общем случае найти выражения для энергии и импульса системы через соответствующие величины для отдельных частиц или найти общие соотношения между энергией и импульсом. Взаимодействие, существующее между частицами, может приводить, например, к зависимости энергии E от времени (напомним, что E означает сумму энергии покоя и кинетической энергии, но не включает энергию взаимодействия). Поэтому фактическое построение механики системы частиц ограничено сравнительно немногими простейшими случаями. К ним относятся:

1) система невзаимодействующих частиц;

2) система частиц, находящихся на больших расстояниях друг от друга и движущихся с весьма большими скоростями;

3) системы частиц со слабым электромагнитным взаимодействием.

Последний случай будет рассмотрен ниже, в § 25.