При больших значениях импульса, когда $p \gg mc$, выражение для функции Гамильтона свободной частицы допускает важное упрощение:

$$H \approx pc. \tag{14,7}$$

Движение с таким большим импульсом, при котором справедлива приближенная формула (14,7), называется ультрарелятивистским. Совершенно ясно, что для частиц с массой покоя, равной нулю, формула (14,7) является точной. Мы будем ею неоднократно пользоваться при рассмотрении процессов с участием световых квантов (фотонов).

§ 15. Механика системы частиц в теории относительности

До сих пор мы ограничивались рассмотрением одной частицы. Построение механики системы частиц в теории относительности является гораздо более сложной задачей. Тем не менее и в последнем случае можно установить ряд важных общих законов.

Систему частиц как целое можно характеризовать ее энергией E, импульсом $\boldsymbol{P}$ и массой покоя M. Если нас интересует движение системы как целого, то, пренебрегая внутренними процессами в системе и ее пространственной протяженностью, можно считать систему одной материальной точкой. Для системы как целого можно написать равенство

$$E = Mc^2, \tag{15,1}$$

где M — масса покоя всей системы. Поскольку всегда $M > 0$, энергия системы частиц, как и энергия одной свободной частицы, является существенно положительной величиной.

Однако невозможно в общем случае найти выражения для энергии и импульса системы через соответствующие величины для отдельных частиц или найти общие соотношения между энергией и импульсом. Взаимодействие, существующее между частицами, может приводить, например, к зависимости энергии E от времени (напомним, что E означает сумму энергии покоя и кинетической энергии, но не включает энергию взаимодействия). Поэтому фактическое построение механики системы частиц ограничено сравнительно немногими простейшими случаями. К ним относятся:

1) система невзаимодействующих частиц;

2) система частиц, находящихся на больших расстояниях друг от друга и движущихся с весьма большими скоростями;

3) системы частиц со слабым электромагнитным взаимодействием.

Последний случай будет рассмотрен ниже, в § 25.

В системе невзаимодействующих частиц энергия и импульс обладают аддитивными свойствами, так что

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}, \tag{15,2}$$

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum \frac{m_i \boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}, \tag{15,3}$$

где N — число частиц в системе и индекс i относится к каждой частице. При этом скорости всех частиц постоянны, а следовательно, постоянны во времени полная энергия и полный импульс системы.

Нетрудно видеть, что величины E и $\boldsymbol{P}$ образуют 4-вектор энергии и импульса. Действительно, можно написать

$$E = \sum \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}, \tag{15,4}$$

$$\boldsymbol{P} = \sum \frac{m_i \boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}. \tag{15,5}$$

Поэтому можно ввести 4-вектор

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{N} p_\alpha^{(i)}. \tag{15,6}$$

Каждый член суммы $p_\alpha^{(i)}$ является 4-вектором энергии и импульса отдельной частицы.

Прежде чем перейти к обсуждению следствий из этих положений, покажем, что в наиболее важном втором случае свойства системы взаимодействующих частиц можно свести к случаю невзаимодействующих частиц.

Рассмотрим систему частиц, движущихся на больших расстояниях друг от друга. Поскольку, по предположению, скорости частиц весьма велики, порядка скорости света, энергия $E_i = \dfrac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}$, вообще говоря, велика по сравнению с энергией их взаимодействия на больших расстояниях. Поэтому можно считать, что, как и для свободных частиц, полная энергия и импульс системы выражаются формулами (15,4) и (15,5).

При сближении частиц (часто его называют столкновением) взаимодействие между частицами может становиться не малым и формулы (15,4) и (15,5) теряют свою применимость. Однако после того как столкнувшиеся частицы вновь расходятся на большие расстояния, формулы (15,4) и (15.5) опять применимы. Очевидно, кроме того, что полная энергия и импульс разошедшихся частиц не могут отличаться от этих величин до взаимодействия. Поэтому можно записать законы сохранения в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{k=1}^{N^*} \frac{m_k c^2}{\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}}, \qquad (15{,}7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{k=1}^{N^*} \frac{m_k v_k}{\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}}. \qquad (15{,}8)$$

Здесь индексы i и k относятся к частицам до и после взаимодействия. Звездочка в суммах справа подчеркивает тот факт, что число частиц в системе до и после взаимодействия может быть различным (ср. § 17).

Величины E и $\boldsymbol{P}$, относящиеся к частицам до и после взаимодействия, образуют 4-вектор энергии и импульса. Согласно (13,11) можно написать инвариант для этого 4-вектора:

$$I = P_\alpha^2 = \sum_\alpha \Big(\sum_i p_\alpha^{(i)}\Big)^2 = \text{invar} = -M^2c^2. \qquad (15{,}9)$$

Постоянство инварианта I выражает общий закон сохранения энергии и импульса.

Преобразуем этот инвариант к виду, удобному для практического использования. Имеем

$$\sum_\alpha \Big(\sum_i p_\alpha^{(i)}\Big)^2 = \sum_{i,\alpha} (p_\alpha^{(i)})^2 + 2 \sum_{k<i,\,\alpha} p_\alpha^{(i)} p_\alpha^{(k)} =$$
$$= \sum_i (\boldsymbol{p}_i)^2 - \sum_i \frac{E_i^2}{c^2} + 2\sum_{k<i} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_k - 2\sum_{k<i} \frac{E_i E_k}{c^2}.$$

При этом мы провели суммирование по индексу α 4-вектора и воспользовались формулой (13,4) для p_τ. Перегруппировывая члены в сумме, находим

$$I = \Big[\sum_i (\boldsymbol{p}_i)^2 + 2\sum_{k<i} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_k\Big] - \frac{1}{c^2}\Big[\sum E_i^2 + 2\sum_{k<i} E_i E_k\Big] =$$
$$= \Big(\sum_i \boldsymbol{p}_i\Big)^2 - \frac{1}{c^2}\Big(\sum_i E_i\Big)^2 = \boldsymbol{P}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -M^2c^2. \qquad (15{,}10)$$

Таким образом, можно написать

$$P^2 - \frac{E^2}{c^2} = (P^*)^2 - \frac{(E^*)^2}{c^2}, \tag{15,11}$$

где звездочками отмечены значения величин после взаимодействия. Компоненты 4-вектора P_α преобразуются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой по общим формулам (13,6)—(13,9).

Часто оказывается удобным пользоваться системой координат, в которой полный импульс равен нулю. Такая система отсчета, как и в классической механике, называется системой центра инерции $K^{(\text{ц. и})}$.

Пусть задана некоторая система отсчета K, в которой система частиц имеет импульс $\boldsymbol{P}$ и энергию E. Найдем скорость движения системы центра инерции $V^{(\text{ц. и})}$ по отношению к системе K. Скорость $V^{(\text{ц. и})}$ характеризует движение системы как целого. Для простоты допустим, что скорость центра инерции системы направлена по оси x. Тогда по (13,6)—(13,9) имеем

$$P_x^{(\text{ц. и})} = 0 = \frac{P_x - V^{(\text{ц. и})}\frac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{(V^{(\text{ц. и})})^2}{c^2}}}, \tag{15,12}$$

$$P_y^{(\text{ц. и})} = 0 = P_y, \qquad P_z^{(\text{ц. и})} = 0 = P_z, \tag{15,13}$$

$$E^{(\text{ц. и})} = \frac{E - V^{(\text{ц. и})}P_x}{\sqrt{1 - \frac{(V^{(\text{ц. и})})^2}{c^2}}}. \tag{15,14}$$

Индексом ц. и. снабжены величины, отнесенные к системе центра инерции.

Из (15,12) получаем

$$V^{(\text{ц. и})} = \frac{P_x c^2}{E}. \tag{15,15}$$

В общем случае произвольной ориентации вектора скорости центра инерции вместо (15,15) получается

$$\boldsymbol{V}^{(\text{ц. и})} = \frac{\boldsymbol{P}c^2}{E}. \tag{15,16}$$

В отличие от классической механики, в релятивистской механике скорость центра инерции нельзя представить как производную по времени от координаты центра инерции:

$$\boldsymbol{V}^{(\text{ц. и})} \neq \frac{d}{dt}\boldsymbol{R}^{(\text{ц. и})}.$$

Действительно, величину $\frac{Pc^2}{E}$ нельзя, вообще говоря, представить в виде производной по времени от какой-либо величины. Поэтому понятие координаты центра инерции для произвольной системы взаимодействующих частиц в релятивистской механике ввести невозможно. В § 25 будет показано, что в случае системы слабовзаимодействующих частиц можно, в известном приближении, пользоваться понятием о центре инерции.

Обсудим еще некоторые свойства массы покоя системы частиц.

Пусть имеется система центра инерции K'. Запишем инвариант 4-вектора энергии и импульса (15,10) для этой системы в виде

$$\left(P^{(\text{ц. и})}\right)^2 c^2 - \left(E^{(\text{ц. и})}\right)^2 = -M^2c^4. \qquad (15,17)$$

Поскольку $P^{(\text{ц. и})}=0$, формула (15,17) приобретает в системе K' вид

$$E^{(\text{ц. и})} = Mc^2, \qquad (15,18)$$

где M — масса покоя.

С другой стороны, по общей формуле (15,2)

$$E^{(\text{ц. и})} = \sum \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}},$$

где v_i — скорость i-й частицы, отнесенная к системе центра инерции. Тогда для массы покоя получаем

$$M = \sum \frac{m_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}. \qquad (15,19)$$

Мы видим, что масса покоя системы частиц не равна сумме масс покоя отдельных частиц $\sum m_i$, но зависит от скоростей их движения по отношению к системе центра инерции.

Рассмотрим, например, случай, когда система частиц представляет идеальный газ. Идеальный газ удовлетворяет, очевидно, тем требованиям к характеру взаимодействия между частицами, о которых мы говорили выше. Тогда, согласно (15,17), масса покоя газа M зависит от внутреннего движения газовых частиц или, что то же самое, от температуры газа.

Различие между массой покоя системы M и суммой масс покоя образующих систему частиц $\sum m_i$, имеет важнейшее значение для процессов, происходящих в природе. Мы обсудим это обстоятельство в следующем параграфе.

В общем случае системы частиц с произвольным взаимодействием формула (15,2) не является выражением для полной энергии системы; она дает лишь сумму энергии покоя и кинетической энергии частиц.

В полную энергию необходимо ввести энергию взаимодействия между частицами. Оказывается, однако, что в релятивистской механике не существует понятия потенциальной энергии взаимодействия системы частиц. Действительно, потенциальная энергия взаимодействия частиц должна зависеть только от их положения. Если положение какой-либо частицы изменяется, то мгновенно должны измениться потенциальная энергия системы частиц и силы, действующие на отдельные частицы. Иными словами, понятие потенциальной энергии взаимодействия частицы связано с представлением о дальнодействии и не может быть введено в теории относительности. В общем случае написать выражение для энергии системы взаимодействующих частиц не представляется возможным. То же относится и к импульсу системы, который в теории относительности не является величиной, независимой от энергии.

Помимо систем, взаимодействующих путем столкновений, в специальной теории относительности можно найти приближенное выражение для взаимодействия заряженных частиц. Это будет сделано в § 25. Гравитационное взаимодействие тел рассматривается в общей теории относительности, изложение которой выходит за рамки нашей книги.

§ 16. Закон сохранения энергии — импульса в ядерной физике

Закон сохранения энергии — импульса и соотношение между массой и энергией не только нашли экспериментальное подтверждение, но стали основными положениями современной ядерной физики. Еще в первой работе Эйнштейна указывалось, что соотношение между массой и энергией может быть проверено экспериментально при изучении явлений радиоактивности. Действительно, характерной особенностью радиоактивного распада, как, впрочем, и всех остальных ядерных процессов, являются большое изменение энергии системы и высокие энергии образующихся ядерных частиц. Из всего многообразия ядерных процессов, в которых релятивистские эффекты играют существенную роль, в рамках этой книги мы должны ограничиться лишь самыми существенными или типичными.

Цель приведенных ниже примеров — показать, что соотношения релятивистской механики являются необходимой основой для подхода к изучению процессов, происходящих с атомными ядрами и элементарными частицами.

1. Реакции распада частиц. Ряд основных процессов, происходящих с атомными ядрами и элементарными ча-