$j_\tau = ic\rho$, то мы получим закон сохранения электрического заряда $de = \rho\, dV$, заключенного в произвольном элементе объема dV. Действительно, рассмотрим закон изменения j_τ при переходе от системы K', в которой заряды покоятся, к системе K. Система K' движется по отношению к K со скоростью v. В системе K' скорость $u = 0$ и у вектора j_a отлична от нуля только компонента j_τ.

Из формулы (11,4) для преобразования четвертой компоненты 4-вектора находим закон изменения плотности заряда:

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{18,4}$$

Умножив (18,4) на элемент объема dV, имеем

$$\rho\, dV = de = \frac{\rho'\, dV}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Закон изменения объема (6,2) дает при этом

$$dV = dV' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

так что

$$\rho\, dV = \rho'\, dV'.$$

Таким образом, заряд любого элемента объема является инвариантом относительно преобразования Лоренца. Это можно наглядно интерпретировать следующим образом: при уменьшении вследствие лоренцева сокращения величины объема, плотность заряда увеличивается в том же отношении, так что полный заряд не изменяется.

§ 19. Релятивистски-инвариантная формулировка уравнений для потенциалов

Выше мы уже указывали, что теория электромагнитного поля с самого начала была сформулирована «правильно» с точки зрения теории относительности. Это означает, что система уравнений Максвелла — Лоренца является релятивистски-инвариантной, удовлетворяющей требованиям теории относительности.

Проще всего в этом можно убедиться, если рассмотреть уравнения для потенциалов.

Согласно сказанному в § 10 ч. I система уравнений

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{u}, \tag{19,1}$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{19,2}$$

при учете условия калибровки

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{19,3}$$

полностью эквивалентна уравнениям Максвелла — Лоренца.

Релятивистская инвариантность системы (19,1)—(19,3) непосредственно вытекает из того, что эта система может быть без всяких изменений записана в четырехмерной форме.

Действительно, умножим (19,2) на i и заметим, что при этом правые части уравнений (19,1)—(19,2) содержат компоненты 4-вектора плотности тока. Отсюда следует, что и левые части представляют компоненты 4-вектора, который мы будем именовать 4-потенциалом A_a,

$$A_a = (\boldsymbol{A},\ i\varphi).$$

С помощью 4-вектора A_a и j_a уравнения (19,1) и (19,2) можно написать в виде

$$\Box A_\alpha = -\frac{4\pi}{c}j_\alpha, \tag{19,4}$$

где $\Box$ означает оператор Даламбера:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}. \tag{19,5}$$

При этом условие калибровки сразу записывается в четырехмерной форме в виде

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{19,6}$$

Таким образом, полная система уравнений для потенциалов представлена в релятивистски-инвариантном виде. Это означает, что законы электродинамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Мы видим, далее, что потенциалы электромагнитного поля, а следовательно, и сами векторы электрического и магнитного полей не являются инвариантными величинами. Относительный характер величины векторов поля никоим образом не является чем-то новым и неожиданным. Достаточно вспомнить, что движущийся заряд создает магнитное поле, которое, однако, отсутствует в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом.

Закон преобразования потенциалов может быть написан без труда, поскольку они преобразуются по общей формуле преобразования компонент 4-вектора (11,1)—(11,4).

Имеем, очевидно,

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{v}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{19,7}$$

$$A_y = A'_y, \tag{19,8}$$

$$A_z = A'_z, \tag{19,9}$$

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{v}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{19,10}$$

В следующих параграфах мы применим эти формулы к рассмотрению электромагнитного поля движущихся зарядов.

§ 20. Поле движущегося заряда

Рассмотрим простейшую задачу о нахождении электромагнитного поля, создаваемого равномерно движущимся зарядом, когда скорость заряда v сравнима со скоростью света. В системе отсчета K', движущейся вместе с зарядом, магнитное поле отсутствует, а потенциал электрического поля выражается формулой

$$\varphi' = \frac{e}{r'}.$$

В инерциальной системе отсчета K, по отношению к которой заряд движется со скоростью v, потенциал электрического поля согласно (19,10) имеет вид

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{r'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{20,1}$$

Найдем теперь формулу преобразования длины радиуса-вектора. Имеем

$$r' = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$