Закон преобразования потенциалов может быть написан без труда, поскольку они преобразуются по общей формуле преобразования компонент 4-вектора (11,1)—(11,4).

Имеем, очевидно,

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{v}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{19,7}$$

$$A_y = A'_y, \tag{19,8}$$

$$A_z = A'_z, \tag{19,9}$$

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{v}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{19,10}$$

В следующих параграфах мы применим эти формулы к рассмотрению электромагнитного поля движущихся зарядов.

§ 20. Поле движущегося заряда

Рассмотрим простейшую задачу о нахождении электромагнитного поля, создаваемого равномерно движущимся зарядом, когда скорость заряда v сравнима со скоростью света. В системе отсчета K', движущейся вместе с зарядом, магнитное поле отсутствует, а потенциал электрического поля выражается формулой

$$\varphi' = \frac{e}{r'}.$$

В инерциальной системе отсчета K, по отношению к которой заряд движется со скоростью v, потенциал электрического поля согласно (19,10) имеет вид

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{r'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{20,1}$$

Найдем теперь формулу преобразования длины радиуса-вектора. Имеем

$$r' = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Асимметрия последней формулы связана с тем, что движение происходит вдоль оси x.

Отсюда находим

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}. \tag{20,2}$$

Заметим, что $x = vt$, $y = 0$, $z = 0$ представляют координаты точки, в которой в момент времени t находится заряд, так что радиус-вектор, проведенный от заряда к точке (x, y, z), можно написать в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(x - vt) + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z \tag{20,3}$$

и

$$r = \sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2}. \tag{20,4}$$

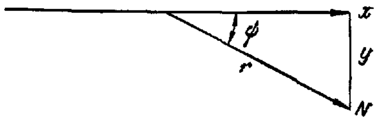

Рис. 26.

Удобно упростить (20,2), выразив φ через r и угол ψ, образуемый вектором $\boldsymbol{r}$ и осью x (рис. 26).

Из рис. 26 видно, что

$$x - vt = r\cos\psi,$$
$$y^2 + z^2 = r^2\sin^2\psi$$

и, следовательно,

$$\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)} = r\sqrt{\cos^2\psi + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\psi} = r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi}.$$

Поэтому имеем

$$\varphi = \frac{e}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi}}. \tag{20,5}$$

Переходя к вычислению вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$, заметим, что в системе K' нет магнитного поля и $\boldsymbol{A}' = 0$. По формулам (19,7) и (19,10) находим

$$A_x = \frac{v}{c}\cdot\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c}\varphi = \frac{ev}{c\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}} = \frac{ev}{cr\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi}},$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

В векторной форме можно написать

$$A = \frac{\varphi v}{c}. \qquad (20,6)$$

Зная потенциалы поля, можно найти и самые поля.

При вычислении электрического поля E нужно помнить, что в нашем случае равномерно движущегося заряда дифференцирование по времени сводится к дифференцированию по координате x согласно формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x}.$$

Действительно, при равномерном движении A и φ зависят от координаты и времени по закону $f(x - vt)$, где f — некоторая функция аргумента $(x - vt)$. Для такой функции всегда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}\frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Отсюда находим

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} =$$
$$= -\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e(x - vt)}{\left\{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{3/2}},$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{ey}{\left\{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{3/2}},$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{ez}{\left\{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{3/2}},$$

или, в векторной форме,

$$E = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{er}{r^3\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}}. \qquad (20,7)$$

При $v \ll c$ формула (20,7) превращается, разумеется, в электростатическое выражение для поля неподвижного заряда.

Магнитное поле H также находим без труда:

$$H = \operatorname{rot} A = \frac{1}{c}\operatorname{rot}(v\varphi) = -\frac{1}{c}[v \operatorname{grad}\varphi] = \frac{1}{c}[vE], \qquad (20,8)$$

Формулы (20,5) и (20,7) показывают, что, в отличие от поля неподвижного заряда, электрическое поле движущегося заряда не имеет сферической симметрии.

Скалярный потенциал φ имеет постоянное значение на поверхности эллипсоида:

$$(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)=\text{const}.$$

Этот эллипсоид получается из сферы при сжатии ее в направлении оси x в $1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ раз.

Характер распределения поля яснее всего виден из формулы

$$|\boldsymbol{E}|=\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{r^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin\psi\right)^{3/2}}. \tag{20,9}$$

На оси x ($\psi=0$) поле меньше электростатического в $1:\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ раз, в плоскости, перпендикулярной к оси x, оно увеличено в отношении $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ раз.

По мере возрастания скорости эллипсоид равных значений потенциала все более сплющивается, величина поля в направлении движения уменьшается, в перпендикулярном направлении — увеличивается. При $v\sim c$ все поле концентрируется в малом интервале углов вблизи плоскости, перпендикулярной к направлению движения. Ширина этого интервала $\Delta\psi\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Магнитное поле $\boldsymbol{H}$ всегда перпендикулярно к направлению движения и вектору электрического поля $\boldsymbol{E}$. При $v\sim c$ $|\boldsymbol{H}|\sim|\boldsymbol{E}|$, при малых скоростях ($v\ll c$) можно положить

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}]\approx\frac{e}{c}\frac{[\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}]}{r^3}, \tag{20,10}$$

если считать приближенно, что $\boldsymbol{E}$ имеет электростатическое значение. Последняя формула совпадает с (20,5) ч. I.

Поле, создаваемое движущимся зарядом, было найдено классическими методами [1]) еще до появления теории относительности. И в этом нет ничего удивительного, так как уравнения Максвелла — Лоренца являются релятивистски-инвариантными.

Применим найденные формулы к вычислению силы взаимодействия двух зарядов e_1 и e_2, движущихся с одинаковой скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно лабораторной системы отсчета. В системе отсчета, связанной с зарядами, сила равна, очевидно, $\boldsymbol{F}=\frac{e_1e_2}{r^3}\boldsymbol{r}$ и направлена вдоль вектора, соединяющего заряды. Направление вектора $\boldsymbol{v}$ выберем за ось x.

[1]) См., например, Р. Беккер, Электронная теория, Гостехиздат, 1941.

С точки зрения лабораторной системы поле заряда e_1 выражается формулами (20,8) и (20,10). На заряд e_2 при этом действует сила Лоренца:

$$\boldsymbol{F} = e_2\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right) = e_2\boldsymbol{E} + \frac{e_2}{c^2}[\boldsymbol{v}[\boldsymbol{vE}]] =$$
$$= e_2\boldsymbol{E} + \frac{e_2}{c^2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{vE}) - \frac{e_2}{c^2}v^2\boldsymbol{E} = e_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{E} + e_2\frac{\boldsymbol{v}vE_x}{c^2}.$$

Эта сила не направлена более по радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$. Компонента силы по направлению движения равна

$$F_x = e_2E_x = \frac{e_1e_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\cos\psi}{r^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}}.$$

Компонента силы в перпендикулярном направлении равна

$$F_y = e_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)E_y = \frac{e_1e_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2\sin\psi}{r^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}}.$$

До появления теории относительности полагали, что, наблюдая взаимодействие между движущимися зарядами, можно определить их абсолютную скорость по отношению к эфиру. Однако попытки измерений не привели ни к каким положительным результатам.

В свете теории относительности ясна ошибка этих рассуждений: в формулы для силы, измеренной в лабораторной системе координат, входит лишь общая относительная скорость обоих зарядов $\boldsymbol{v}$.

Полученный результат интересно применить к случаю движения равномерно заряженной сферы. В собственной системе отсчета, движущейся вместе со сферой, плотность заряда постоянна, линии поля нормальны к поверхности. В лабораторной системе отталкивание зарядов должно приводить к неравномерному распределению плотности заряда по сфере. Если провести полярную ось в направлении движения, то плотность заряда должна быть наибольшей у полюсов сферы и минимальной — в плоскости экватора.

С нерелятивистской точки зрения, измеряя это распределение заряда, можно было бы найти абсолютную скорость движения сферы. В действительности это не так: движущаяся сфера с точки зрения лабораторной системы должна испытывать сжатие и превращаться в эллипсоид. Расчет показывает, что эффект сжатия сферы в точности компенсирует эффект накопления заряда у полюсов. В результате плотность заряда, измеренная в лабораторной системе отсчета, будет постоянной по поверхности сферы.

Приведенный пример очень интересен потому, что показывает, как «правильная» с точки зрения теории относительности теория Максвелла — Лоренца в соединении с классическими представлениями о пространстве и времени приводит к неверным результатам. Только последовательное изменение воззрений на пространство и время в сочетании с законами электродинамики позволяет привести теорию к согласию с экспериментом.

Наряду с полем равномерно движущегося заряда оказывается возможным найти поле заряда, совершающего произвольное движение.

В § 25 ч. I мы нашли выражение для потенциалов Лиенара — Вихерта и указывали, что соответствующие выражения не теряют своей применимости и при скоростях, близких к скорости света.

Чтобы убедиться в этом, напишем потенциалы Лиенара — Вихерта в четырехмерном виде.

Введем 4-вектор R_a, имеющий компоненты $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$, $ic(t-\tau)$, где $\boldsymbol{r}$ — координата точки наблюдения, $\boldsymbol{r}_0$ — координата заряда и $\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}{c}$. При этом связь между компонентами вектора R_a дается формулой

$$R_\alpha^2 = 0.$$

Действительно, подставляя в нее компоненты R_a, имеем

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2 - c^2(t-\tau)^2 = 0.$$

С помощью 4-вектора R_a можно ввести 4-потенциал Лиенара — Вихерта соотношением

$$A_\alpha = -\frac{eu_\alpha}{R_\beta u_\beta},$$

где по индексу β проводится суммирование ($\beta = x, y, z, \tau$). Действительно, пользуясь определением 4-скорости u_β (11,6), имеем

$$R_\beta u_\beta = R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z + R_\tau u_\tau =$$

$$= (x-x_0)\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + (y-y_0)\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + (z-z_0)\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} +$$

$$+ ic(t-\tau)\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{v}}{c} - c(t-\tau)\right\} =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{v}}{c} - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\right\} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{R(\tau)\boldsymbol{v}}{c} - R(\tau)\right\},$$

где, в соответствии с обозначениями § 25 ч. I, $\boldsymbol{R}(\tau)=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор, проведенный от мгновенного положения заряда до точки наблюдения в момент времени τ.

Соответственно, компоненты A_a имеют вид

$$A_x=-\frac{ev_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}-R(\tau)\right\}}=\frac{ev_x}{c\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}\tag{20,11}$$

и аналогичные выражения для A_y, A_z,

$$A_\tau=i\varphi=-\frac{iec}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}-R(\tau)\right\}}=i\frac{e}{\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}.$$

Отсюда

$$\varphi=\frac{e}{\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}.\tag{20,12}$$

Формулы (20,11) и (20,12) полностью идентичны формулам (25,3) и (25,4) ч. I.

Таким образом, потенциалы Лиенара — Вихерта действительно можно представить в релятивистски-инвариантной форме и, следовательно, ими можно пользоваться при произвольном значении скорости движения заряда.

§ 21. Тензор электромагнитного поля и уравнения Максвелла

Перейдем теперь к вычислению компонент электрического и магнитного полей.

Пользуясь определением 4-потенциала и вводя координаты 4-радиуса-вектора, мы можем представить компоненты электрического поля в виде

$$\left.\begin{aligned}E_x&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial\tau}\right),\\E_y&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial\tau}\right),\\E_z&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\tau}\right),\end{aligned}\right\}\tag{21,1}$$

в то время как компоненты магнитного поля выражаются через компоненты вектора-потенциала обычными соотношениями

$$H_x=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\tag{21,2}$$

и аналогично для H_y и H_z.