где, в соответствии с обозначениями § 25 ч. I, $\boldsymbol{R}(\tau)=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор, проведенный от мгновенного положения заряда до точки наблюдения в момент времени τ.

Соответственно, компоненты A_a имеют вид

$$A_x=-\frac{ev_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}-R(\tau)\right\}}=\frac{ev_x}{c\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}} \tag{20,11}$$

и аналогичные выражения для A_y, A_z,

$$A_\tau=i\varphi=-\frac{iec}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}-R(\tau)\right\}}=i\frac{e}{\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}.$$

Отсюда

$$\varphi=\frac{e}{\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}. \tag{20,12}$$

Формулы (20,11) и (20,12) полностью идентичны формулам (25,3) и (25,4) ч. I.

Таким образом, потенциалы Лиенара — Вихерта действительно можно представить в релятивистски-инвариантной форме и, следовательно, ими можно пользоваться при произвольном значении скорости движения заряда.

§ 21. Тензор электромагнитного поля и уравнения Максвелла

Перейдем теперь к вычислению компонент электрического и магнитного полей.

Пользуясь определением 4-потенциала и вводя координаты 4-радиуса-вектора, мы можем представить компоненты электрического поля в виде

$$\left.\begin{aligned}E_x&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial \tau}\right),\\ E_y&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial \tau}\right),\\ E_z&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \tau}\right),\end{aligned}\right\} \tag{21,1}$$

в то время как компоненты магнитного поля выражаются через компоненты вектора-потенциала обычными соотношениями

$$H_x=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \tag{21,2}$$

и аналогично для H_y и H_z.

Симметрия формул (21,1) и (21,2) побуждает нас попытаться записать всю их совокупность в виде одной общей формулы. Именно, введем тензор $F_{\alpha\beta}$ с помощью соотношения

$$F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \qquad (21,3)$$

Тензор $F_{\alpha\beta}$ является антисимметричным по определению. Вычисление компонент тензора $F_{\alpha\beta}$ приводит к таблице

$$F_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21,4)$$

Мы видим, что все компоненты векторов электрического и магнитного полей оказываются компонентами одной тензорной величины $F_{\alpha\beta}$. Уравнения Максвелла представляют собой систему уравнений для тензора $F_{\alpha\beta}$. Именно, если написать для $F_{\alpha\beta}$ уравнение

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x_\beta}=0, \qquad (21,5)$$

то, полагая α, β и λ последовательно равными 1, 2, 3 и 4 и пользуясь определением (21,4), мы легко найдем, что четырехмерное уравнение (21,5) представляет запись двух векторных уравнений Максвелла — Лоренца (8,1) и (8,2) (см. ч. I).

Аналогично, написав четырехмерное уравнение

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{4\pi}{c}j_\alpha, \qquad (21,6)$$

мы можем убедиться, что оно охватывает два векторных уравнения (8,3) и (8,4). Формулы (4,5) и (26,6) представляют релятивистски-инвариантную форму записи системы уравнений Максвелла — Лоренца. Неразрывная связь между электрическими и магнитными полями выступала в нерелятивистской формулировке теории электромагнитного поля в виде положения, следующего из совокупности опытных данных. В электродинамике теории относительности эта связь оказывается совершенно неизбежной и само собой разумеющейся. Из самого определения поля вытекает, что его свойства характеризуются не двумя векторами, но одним антисимметричным тензором. Уравнения электромагнитного поля являются уравнениями относительно этого тензора. Компоненты полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ фигурируют в тензоре $F_{\alpha\beta}$ на равных правах. При преобразованиях Лоренца, которые мы сейчас можем сформулировать, поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются друг через друга.

Действительно, по формулам (11,21) имеем (полагая $A_{xy} = H_z$, $A_{xz} = -H_y$, $A_{x\tau} = -iE_x$, $A_{y\tau} = -iE_y$, $A_{z\tau} = -iE_z$):

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \frac{E'_y + \frac{v}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E_z = \frac{E'_z - \frac{v}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{21,7}$$

$$H_x = H'_x, \qquad H_y = \frac{H'_y - \frac{v}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad H_z = \frac{H'_z + \frac{v}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{21,8}$$

Мы видим, что утверждения типа «поле имеет чисто электрический» или «чисто магнитный характер» являются относительными. Электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и отлично от нуля в другой. Бессмысленно поэтому приписывать физическую реальность отдельно взятым электрическому и магнитному полям. Физической реальностью является их совокупность, выражаемая тензором электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$.

Естественно установить, какие величины, характеризующие электромагнитное поле, являются инвариантными. Поскольку электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором поля $F_{\alpha\beta}$ согласно результатам, приведенным в § 11, такими инвариантами являются величины $F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}F_{\mu\nu}F_{\nu\alpha}$. Кубический инвариант $F_{\alpha\beta}F_{\lambda\beta}F_{\lambda\alpha}$ оказывается равным нулю. Простое вычисление дает

$$J_1 = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = H^2 - E^2 = \text{invar}, \tag{21,9}$$

$$J_2 = F_{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}F_{\mu\nu}F_{\nu\alpha} = (\boldsymbol{EH})^2 = \text{invar}. \tag{21,10}$$

Инварианты J_1 и J_2 являются абсолютными характеристиками поля. Утверждения «электромагнитное поле равно нулю» ($J_1 = J_2 = 0$) или «электрическое и магнитное поля равны друг другу по величине и перпендикулярны по направлению» ($J_1 = J_2 = 0$) являются примерами абсолютных утверждений.

Точно так же, если $J_2 = 0$, т. е. поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны друг к другу, то они останутся перпендикулярными во всех системах отсчета. Если при этом $J_1 > 0$, то во всех системах отсчета $|\boldsymbol{H}| > |\boldsymbol{E}|$. Мы можем найти такую систему отсчета, в которой электрическое (но не магнитное) поле равно нулю. Аналогично при $J_2 < 0$ можно найти систему отсчета, в которой магнитное поле отсутствует.

В предельном случае $v \ll c$ формулы преобразования Лоренца существенно упрощаются. Пренебрегая $\frac{v^2}{c^2}$, их можно записать в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - \frac{[\boldsymbol{vH}]}{c}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' + \frac{[\boldsymbol{vE}]}{c}. \tag{21,11}$$

Эти преобразования были получены еще в нерелятивистской теории поля.

В заключение отметим, что связь и сходство между полями $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не исключают и существования принципиального различия между ними, о котором мы упоминали в § 7. В электродинамике теории относительности это различие проявляется в том, что компоненты электрического поля являются временными (мнимыми) компонентами тензора электромагнитного поля, тогда как компоненты магнитного поля образуют совокупность его пространственных (вещественных) компонент.

§ 22. Допплер-эффект; эффект Мёссбауэра; наблюдение за быстро движущимися телами; преобразование углов, интенсивности, сечения

Мы видели, что утверждение «электромагнитное поле отсутствует в некоторой точке пространства в определенный момент времени» имеет абсолютный характер. Из этого следует, что величина фазы α в электромагнитной волне

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i\alpha},$$
$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0e^{i\alpha}$$

является инвариантом. Если, например, фаза равна $\frac{\pi}{2}$ или целому кратному $\frac{\pi}{2}$, так что $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0$, то это значение фазы должно сохраниться во всех инерциальных системах отсчета.

Вводя формально 4-вектор k_α,

$$k_\alpha=\left(\boldsymbol{k},\ i\frac{\omega}{c}\right),$$

который носит название четырехмерного волнового вектора, можно записать фазу волны в виде скалярного произведения двух 4-векторов, k_α и r_α,

$$\alpha=k_\alpha r_\alpha=(\boldsymbol{kr}-\omega t).$$

Поскольку фаза является инвариантом, последняя формула показывает, что формально определенная величина k_α действительно является 4-вектором.

Закон преобразования компонент 4-вектора позволяет найти закон преобразования частот в теории относительности. Именно, из определения четырехмерного волнового вектора следует, что его четвертая компонента преобразуется по закону

$$k_\tau=\frac{k'_\tau+i\frac{v}{c}k'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$