

Эти преобразования были получены еще в нерелятивистской теории поля.

В заключение отметим, что связь и сходство между полями E и H не исключают и существования принципиального различия между ними, о котором мы упоминали в § 7. В электродинамике теории относительности это различие проявляется в том, что компоненты электрического поля являются временными (мнимыми) компонентами тензора электромагнитного поля, тогда как компоненты магнитного поля образуют совокупность его пространственных (вещественных) компонент.

§ 22. Допплер-эффект; эффект Мёссбауэра; наблюдение за быстро движущимися телами; преобразование углов, интенсивности, сечения

Мы видели, что утверждение «электромагнитное поле отсутствует в некоторой точке пространства в определенный момент времени» имеет абсолютный характер. Из этого следует, что величина фазы α в электромагнитной волне

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{i\alpha}, \\ H &= H_0 e^{i\alpha} \end{aligned}$$

является инвариантом. Если, например, фаза равна $\frac{\pi}{2}$ или целому кратному $\frac{\pi}{2}$, так что $E = H = 0$, то это значение фазы должно сохраняться во всех инерциальных системах отсчета.

Вводя формально 4-вектор k_α ,

$$k_\alpha = \left(k, i \frac{\omega}{c} \right),$$

который носит название четырехмерного волнового вектора, можно записать фазу волны в виде скалярного произведения двух 4-векторов, k_α и r_α ,

$$\alpha = k_\alpha r_\alpha = (kr - \omega t).$$

Поскольку фаза является инвариантом, последняя формула показывает, что формально определенная величина k_α действительно является 4-вектором.

Закон преобразования компонент 4-вектора позволяет найти закон преобразования частот в теории относительности. Именно, из определения четырехмерного волнового вектора следует, что его четвертая компонента преобразуется по закону

$$k_\tau = \frac{k'_\tau + i \frac{v}{c} k'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Выражая k_x через частоту ω , находим

$$\omega = \frac{\omega' + vk'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Написав k'_x в виде $k'_x = \frac{\omega'}{c} \cos \theta'$, где $\cos \theta'$ — направляющий косинус волнового вектора, находим

$$\omega = \frac{\omega' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (22,1)$$

Аналогично

$$k_x = \frac{\omega}{c} n_x = \frac{k'_x - ik'_y \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\omega'}{c} \cos \theta' + \frac{v}{c^2} \omega'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (22,2)$$

Выражая ω через ω' , находим

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'}, \\ \sin \theta &= \sin \theta' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'}. \end{aligned} \right\} \quad (22,3)$$

Формулы обратного перехода от системы K к системе K' гласят:

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (22,4)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}, \\ \sin \theta' &= \sin \theta \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (22,5)$$

Формула (22,1) выражает закон доплер-эффекта в теории относительности. Как известно, доплер-эффект заключается в

изменении частоты, излучаемой движущимся источником, по сравнению с частотой, излучаемой неподвижным источником.

Формулы (22,5) приводят к закону преобразования углов. Закон преобразования углов, даваемый этими соотношениями, совпадает с тем, который следует из (7,4). В этом проще всего убедиться, разделив нижнюю формулу (22,5) на верхнюю.

В этих формулах ω' — частота, измеренная в системе отсчета, движущейся вместе с источником излучения, а ω — частота в неподвижной системе. Предполагается, что источник вместе с системой отсчета K' движется вдоль оси x . Угол θ' представляет угол между направлением излученной волны, характеризуемым в системе K' вектором \mathbf{k}' , и направлением движения источника. При переходе к неподвижной системе отсчета угол θ' преобразуется в угол θ , образуемый с направлением движения вектором \mathbf{k} .

Для практического использования наиболее важна формула (22,4), которую можно записать в виде

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (22,6)$$

Формула (22,6) позволяет найти частоту света ω в зависимости от частоты света ω' , излучаемого движущимся источником в собственной системе отсчета K' , и угла θ , измеренного в системе K .

Если источник света приближается или удаляется от наблюдателя, находящегося, например, в начале системы K' , то говорят о продольном доплер-эффекте. Приближению отвечает $\cos \theta = 1$ и частота $\omega > \omega'$, удалению $\cos \theta = -1$ и $\omega < \omega'$.

Интересно сравнить релятивистскую формулу для изменения частоты при доплер-эффекте с классической. Последняя получается из элементарного рассмотрения цуга волн, испускаемых движущимся источником и достигающих наблюдателя, и имеет вид

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right). \quad (22,7)$$

Величина угла в классической физике считалась инвариантной во всех системах отсчета.

Сравнивая классическую и релятивистскую формулы для изменения частоты при доплер-эффекте, мы видим, что при движении источника излучения со скоростью $v \ll c$, так что можно положить $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$ и $\frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \approx 1 + \frac{v}{c} \cos \theta$, обе формулы совпадают. Однако, если учитывать квадратичные члены,

то между этими формулами возникает существенное различие. В частности, при движении источника в направлении, перпендикулярном к направлению наблюдения, т. е. при $\theta = \frac{\pi}{2}$, классическая формула (22,7) показывает, что изменение частоты не происходит. Наоборот, согласно теории относительности возникает изменение частоты («поперечный» доплер-эффект), равное, согласно (23,6),

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (22,8)$$

Изучение законов доплер-эффекта на опыте имело особенно большое значение потому, что изменение частоты непосредственно связано с изменением времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Экспериментальное изучение доплер-эффекта позволило с большой степенью точности подтвердить правильность релятивистских соотношений.

В опытах Айвса изучалось изменение частоты, излучавшейся атомами водорода в канальных лучах. Скорость атомов составляла приблизительно $6 \cdot 10^{-3} c$. Главная трудность заключалась в выделении эффекта второго порядка по $\left(\frac{v}{c}\right)$, малого по сравнению с обычным (классическим) смещением линии на величину порядка $\frac{v}{c}$. Для этого световые лучи, испускаемые вдоль и против направления движения, совмещались с помощью зеркал. Согласно релятивистской формуле (22,1) среднее значение излучаемых частот линий равно

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega' \left(1 - \frac{v}{c}\right)}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\omega' \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{\omega'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \omega' \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]. \quad (22,9) \end{aligned}$$

Классический результат был бы $\bar{\omega} = \omega'$.

Измерения с большой степенью точности подтвердили релятивистскую формулу (22,9).

Опыты Айвса, относящиеся к 1938 г., явились первым непосредственным экспериментальным подтверждением релятивистского закона изменения времени при преобразованиях Лоренца. С этой точки зрения они играли роль, аналогичную опытам Майкельсона. Взяв за основу совокупность этих двух опытов, можно было бы последовательно построить всю схему теории относительности, если бы эксперимент в этой области предшествовал развитию теории.

Чрезвычайно точное измерение квадратичного эффекта Доплера стало возможным в самое последнее время благодаря открытию нового важного явления, так называемого эффекта Мёссбауэра. Хорошо известно, что γ -кванты, излучаемые ядрами, являются в высокой степени монохроматическими. Ширина соответствующих спектральных линий на много порядков меньше естественной ширины линий, излучаемых атомами при оптических переходах. Это обстоятельство служило в течение долгого времени препятствием к наблюдению резонансного поглощения ядрами, т. е. поглощению ими γ -квантов собственных частот.

Ядра, как и атомные системы, весьма энергично поглощают излучение той частоты, которую они сами излучают. Однако, в отличие от излучающих атомных систем, ядра при излучении γ -квантов испытывают очень значительную отдачу. Эта отдача изменяет частоту излучаемого γ -кванта, что, благодаря очень малой ширине линий, приводит к полному нарушению резонанса.

Мёссбауэр показал, что ситуация может быть существенно изменена, если ядра γ -излучатели находятся в кристаллической решетке. Сила взаимодействия атомов в кристаллической решетке с соседями весьма велика. Поэтому импульс отдачи, получаемый ядром при излучении γ -кванта, оказывается недостаточным для того, чтобы ядро было вырвано из своего положения в решетке. Импульс отдачи передается всему кристаллу как целому¹⁾. Масса последнего чрезвычайно велика и излучение γ -кванта происходит практически без отдачи. γ -лучи, излучаемые ядрами, находящимися в кристаллической решетке, имеют несмещенную частоту ν_0 . При пропускании γ -лучей, излученных кристаллическим излучателем без отдачи через поглотитель, содержащий те же ядра, что и излучатель, наблюдается резонансное поглощение

Хотя испускание γ -квантов происходит без отдачи и импульс кристалла можно считать равным нулю, наличие теплового движения приводит к малому изменению частоты. Именно, поскольку скорость излучателя — атомного ядра, совершающего тепловое движение, отлична от нуля, должен иметь место эффект Доплера.

Для вычисления изменения частоты можно воспользоваться следующими соображениями.

Если ядро излучает частоту ν_0 , то энергия γ -кванта равна $h\nu_0$. Масса γ -кванта равна $\frac{h\nu_0}{c^2}$. В результате излучения масса

¹⁾ По крайней мере при достаточно низкой температуре. Более подробно об условиях, при которых импульс передается кристаллу как целому, см. Р. Мёссбауэр, УФН, т. 72, вып. 4 (1960), Ф. Л. Шапиро — в том же выпуске журнала.

ядра уменьшается на эту величину. Пусть масса ядра до излучения равна M , а его кинетическая энергия

$$E_{\text{кин}}^{(0)} = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4} - M c^2 \approx \frac{p^2}{2M}.$$

При излучении масса ядра уменьшается на величину $\frac{h\nu_0}{c^2}$ при постоянном значении импульса. При этом кинетическая энергия изменяется на величину

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{кин}} = & \left\{ \sqrt{p^2 c^2 + \left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right)^2 c^4} - \left(M - \frac{h\nu}{c^2}\right) c^2 \right\} - \\ & - E_{\text{кин}}^{(0)} \approx \left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right) c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2\left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right)^2 c^2}\right) - \\ & - \left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right) c^2 - \frac{p^2}{2M} \approx \frac{p^2}{2M^2} \frac{h\nu_0}{c^2}. \end{aligned}$$

Заменяя истинное значение p^2 средним значением $M^2 \bar{v}^2$ для теплового движения, получаем

$$\Delta E_{\text{кин}} \approx h\nu_0 \frac{\bar{v}^2}{c^2}.$$

Увеличение кинетической энергии излучающего ядра в процессе излучения движущимся ядром означает, что γ -квант уносит энергию $h\nu_0 - \Delta E_{\text{кин}} = h\nu_0 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}\right)$. Эта энергия меньше, чем энергия γ -кванта, излучаемого неподвижным источником, на величину $\Delta E_{\text{кин}}$. Таким образом, тепловое движение излучающих ядер приводит к смещению частоты от ν_0 до ν , равной

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{2c^2}\right).$$

Это выражение для смещенной частоты совпадает с формулой квадратичного (с учетом членов порядка $\frac{\bar{v}^2}{c^2}$) эффекта Допплера. Отсутствие линейного члена в формуле доплер-эффекта связано с тем, что средняя скорость теплового движения равна нулю.

Сдвиг излучаемой линии на величину $\frac{\nu_0 \bar{v}^2}{2c^2}$ хорошо согласуется с опытными данными.

Поскольку среднеквадратичная скорость молекулы в кристалле зависит от температуры, можно найти температурную зависимость величины смещения $\nu - \nu_0$:

$$\frac{d \Delta \omega}{dT} = - \frac{\omega_0}{Mc^2} \frac{d}{dT} \frac{M \bar{v}^2}{2}.$$

Но в кристалле теплоемкость при температуре, существенно выше дебаевской, равна (см. (30,1) ч. III):

$$C_V = N \frac{d\bar{\epsilon}}{dT} = N \frac{d}{dT} \left(\frac{M\bar{v}^2}{2} + \frac{M\omega^2 \bar{q}^2}{2} \right) = N \frac{dM\bar{v}^2}{dT},$$

откуда

$$\frac{d \Delta\omega}{dT} = - \frac{\omega_0}{2Mc^2N} C_V.$$

Точность измерений эффекта Мёссбауэра настолько велика, что и этот эффект был измерен. Мы не можем останавливаться здесь на ряде других весьма важных результатов, полученных при изучении эффекта Мёссбауэра¹⁾.

Остановимся теперь на некоторых формулах преобразования величин, играющих важную роль в физике. Мы начнем с рассмотрения излучения частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света.

Предположим, что в системе координат, движущейся вместе с излучающей частицей, излучение может происходить под большим углом к направлению движения, т. е. $\cos \theta'$ изменяется в пределах

$$0 \leq \cos \theta' \leq 1.$$

Посмотрим, каков будет угол, который будет образовывать излучение в неподвижной (лабораторной) системе отсчета.

Формулу (22,3) удобно преобразовать, положив в ней

$$v \approx c - \frac{c}{\alpha^2},$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

При v , близких к c , величина $\alpha^2 \gg 1$. Вводя это обозначение, получаем при $\alpha \gg 1$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \theta' + 1 - \frac{1}{\alpha^2}}{1 + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \cos \theta'} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\alpha^2(1 + \cos \theta')}}{\cos \theta'} \approx 1 + \frac{\cos \theta' - 1}{\cos \theta' + 1} \frac{1}{\alpha^2} = 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta'}{2}}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

¹⁾ См. цитированную статью Ф. Л. Шапиро (сноска на стр. 289), а также статьи Мёссбауэра и Паунда в том же номере УФН.

Поскольку $\cos \theta$ близок к единице, сам угол θ равен

$$\theta \sim \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}}{\alpha} \sim \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

и весьма мал при достаточно большом значении α , т. е. при малом значении разности $c - v$. Это означает, что в неподвижной системе все излучение направлено вперед и заключено в узком конусе углов $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Раствор этого конуса тем меньше, чем ближе скорость источника v к скорости света.

Получим, далее, важную для приложений формулу преобразования элемента телесного угла $d\Omega$. Имеем, по определению,

$$\begin{aligned} d\Omega &= 2\pi \sin \theta \, d\theta = -2\pi \, d \cos \theta, \\ d\Omega' &= -2\pi \, d \cos \theta'. \end{aligned}$$

Поэтому

$$d\Omega = \frac{d \cos \theta}{d \cos \theta'} d\Omega'. \quad (22,10)$$

Из формулы (22,5) находим

$$1 + \frac{v}{c} \cos \theta' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (22,11)$$

Дифференцируя (22,11) по $\cos \theta$, находим

$$\frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2}.$$

Поэтому окончательно

$$d\Omega' = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} d\Omega. \quad (22,12)$$

Найдем закон преобразования энергии в электромагнитной волне. Из общего соотношения (13,9) и формулы (33,12) ч. I имеем

$$E = \frac{E' - \frac{E'}{c} (nv)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E' \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (22,13)$$

Инвариант 4-вектора энергии — импульса для электромагнитного поля в силу соотношения (27,10) ч. I равен нулю:

$$I = \mathbf{g}^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0. \quad (22,14)$$

Заметим, что выписывая формулы для энергии и импульса поля, которые были определены в ч. I как плотности соответствующих величин и отнесены к единице объема, движущегося вместе с полем, т. е. со скоростью света, мы должны были бы более строго определить, что означает такой объем в теории относительности¹⁾.

Сравнивая (22,13) с формулой (22,4) для преобразования частоты, приходим к важному равенству:

$$\frac{E}{\omega} = \frac{E'}{\omega'} = \text{invar.} \quad (22,15)$$

Найдем теперь выражение для преобразования полной интенсивности излучения:

$$I = - \frac{dE}{dt}.$$

Поскольку полный импульс, излучаемый системой в той системе отсчета, в которой она в момент излучения покоилась, равен нулю (ср. (28,5) ч. I), можно написать

$$E = \frac{E'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда в силу (6,3)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{E'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dE'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt'} = \frac{dE'}{dt'}$$

и, следовательно,

$$I = - \frac{dE}{dt} = - \frac{dE'}{dt'} = \text{invar.} \quad (22,16)$$

Таким образом, полная интенсивность (энергия, излучаемая в единицу времени) является инвариантом. Интенсивность излучения в элементе телесного угла $d\Omega$ преобразуется по формуле

$$dI = I(\theta) d\Omega = I'(\theta') d\Omega' = \text{invar.}$$

¹⁾ Это преобразование можно найти, например, в книге В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947 или в неоднократно цитированной книге Беккера.

откуда следует, что

$$I(\theta) = I'(\theta') \frac{d\Omega'}{d\Omega} = I'(\theta') \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2}. \quad (22,17)$$

Комбинируя формулы (22,4) и (22,12), приходим к выражению

$$\omega^2 d\Omega = \omega'^2 d\Omega' = \text{invar.} \quad (22,18)$$

На практике часто приходится рассматривать закон преобразования величин dk_x, dk_y, dk_z . Из (22,2) находим

$$dk_x = \frac{dk'_x + \frac{v d\omega'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dk'_x \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{d\omega'}{dk'_x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Учитывая, что $\omega' = c \sqrt{k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2}$, имеем

$$\frac{d\omega'}{dk'_x} = \frac{k'_x c^2}{\omega'},$$

так что

$$dk_x = \frac{dk'_x \left(1 + \frac{vk'_x}{\omega'}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dk'_x}{\omega'} \frac{\omega' + vk'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dk'_x}{\omega'} \omega.$$

Кроме того, можно написать

$$dk'_y = dk_y; \quad dk'_z = dk_z,$$

откуда находим

$$\frac{dk_x dk_y dk_z}{\omega} = \frac{dk'_x dk'_y dk'_z}{\omega'} = \text{invar.}, \quad (22,19)$$

или, в сферических координатах,

$$\frac{k^2 dk d\Omega}{\omega} = \frac{k'^2 dk' d\Omega'}{\omega'} = \text{invar.} \quad (22,20)$$

Важным вопросом в современной физике частиц высокой энергии является вопрос о преобразовании полного сечения рассеяния при переходе от одной инерциальной системы к другой.

В § 43 ч. I мы видели, что полное сечение в классической физике является инвариантом. В теории относительности эффективное сечение в общем случае не является инвариантом.

Согласно (43,2) и (43,4) ч. I полное число частиц, рассеянных за время dt объемом V в системе отсчета K , в которой рассеиватель покоится, равно

$$dN = \sigma I_0 \rho V dt,$$

где ρ — плотность числа частиц рассеивателя и

$$I_0 = n |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| = n v_{\text{отн}},$$

n — плотность частиц в рассеиваемом пучке, \mathbf{v}_2 — скорость рассеиваемых частиц, \mathbf{v}_1 — скорость частиц рассеивателя, равная нулю в системе K .

Пусть в системе K' рассеиватель движется со скоростью \mathbf{v}'_1 . Тогда ввиду инвариантности числа частиц dN имеем

$$dN = \sigma I'_0 \rho' V dt = \sigma' V' I'_0 \rho' dt',$$

где

$$I'_0 = n' |\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1|.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma n \rho |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| V dt = \sigma' n' \rho' |\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1| V' dt'.$$

В силу формул (6,2) и (6,3) произведение $V dt$ является инвариантом. Плотность рассеиваемых частиц n и плотность рассеиваемых частиц ρ удовлетворяют уравнению непрерывности. Соответственно этому, можно построить 4-векторы $(\rho \mathbf{v}_1, i c \rho)$ и $(n \mathbf{v}_2, i c n)$. Образует их скалярное произведение, являющееся инвариантом. Имеем, очевидно,

$$(\rho \mathbf{v}_1, i c \rho) \cdot (n \mathbf{v}_2, i c n) = n' \rho' \mathbf{v}'_2 \mathbf{v}'_1 - c^2 \rho' n' = -c^2 \rho n,$$

поскольку в системе K рассеиватель покоится и $\mathbf{v}_1 = 0$.

Преобразуя, имеем

$$\rho' n' \left(1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \mathbf{v}'_2}{c^2} \right) = \rho n.$$

Таким образом, можно написать

$$\sigma |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| = \sigma v_{\text{отн}} = \frac{\sigma' |\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1|}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \mathbf{v}'_2}{c^2} \right)}.$$

Поскольку $\mathbf{v}_1 = 0$, последнюю формулу можно записать в симметричном виде:

$$\frac{\sigma |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{c^2} \right)} = \frac{\sigma' |\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1|}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}'_1 \mathbf{v}'_2}{c^2} \right)}. \quad (22,21)$$

Мы видим, что полное эффективное сечение рассеяния не является инвариантной величиной.

В частном случае, когда скорости рассеиваемых частиц и рассеивателя направлены навстречу друг другу или в противоположных направлениях, мы можем выбрать направление движения за ось x и воспользоваться формулой сложения скоростей. Согласно (7,1) имеем

$$v_2 = \frac{v'_2 - v'_1}{1 - \frac{v'_1 v'_2}{c^2}}.$$

Таким образом, в этом частном случае

$$\sigma = \sigma' = \text{invar.} \quad (22,22)$$

Интересным является вопрос о том, в каком виде представляются быстро движущиеся объекты при их регистрации на фотопластинку или визуальном наблюдении. Иными словами, спрашивается, будет ли заметным лоренцево сокращение? Например, будет ли наблюдаться шар в виде эллипсоида, а куб в виде параллелепипеда и т. д.? Недавно соответствующее исследование было проведено Террелом ¹⁾. Оказалось, что быстро движущиеся объекты должны наблюдаться не сплюснутыми, но повернутыми, причем угол поворота зависит от скорости объекта по отношению к наблюдателю и от угла наблюдения. Для того чтобы понять этот на первый взгляд неожиданный результат, уточним различие между результатами измерения формы быстро движущегося тела и специальным случаем регистрации этой формы на фотопластинке. В общем случае для измерения формы тела, например, регистрируя излучение, одновременно выходящее с различных точек его поверхности, мы должны учесть конечное значение скорости света.

Различные точки объекта наблюдения — движущегося тела — находятся на различных расстояниях от регистрирующего прибора. Поэтому электромагнитные волны, излучаемые различными точками поверхности тела, до попадания в прибор проходят различные пути за разное время. Для получения правильной формы объекта наблюдения необходимо внести соответствующие коррективы в данные измерений.

При фотографировании или визуальном наблюдении тела ситуация изменяется. Фотопластинка (или глаз) регистрирует излучение, дошедшее до нее в данный момент времени. Следовательно, на фотопластинке одновременно регистрируются электромагнитные волны, излученные разными точками объекта на-

¹⁾ J. Terrel, Phys. Rev. 116, 1041, 1959. См. также работу W. Weiskopf, Physics to day 13, 24, 1960.

блюдения в различные моменты времени. Пусть в некоторой системе отсчета покоится фотопластинка $\alpha\alpha$ (рис. 27). Предположим, что по направлению к ней движется протяженное тело. Скорость тела (и связанной с ним системы отсчета K') обозначим через v . Назовем углом наблюдения θ угол между прямой, проведенной от фотопластинки к телу, и вектором скорости v .

Излучение тела можно характеризовать в системе отсчета K' , связанной с телом, волновым вектором k' . Угол наблюдения в системе отсчета K' будет равен θ' . При этом угол θ' , образуемый волновым вектором k' со скоростью v , равен, очевидно, $\theta' = \pi - \theta$.

В системе отсчета K волновой вектор k образует с вектором v угол θ , причем $\theta = \pi - \theta'$. Будем считать телесный угол, под которым виден объект наблюдения, достаточно малым. При этом излучение, испускаемое разными его точками, можно характеризовать одним значением волнового вектора k . Назовем «картинкой» изображение тела на фотопластинке, полученное в некоторый

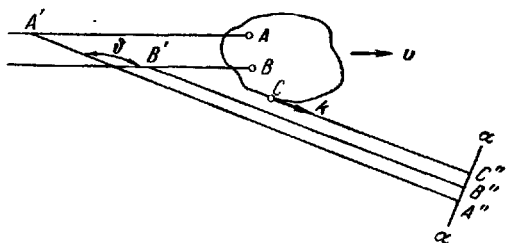


Рис. 27.

момент времени. Посмотрим, каким образом получается картинка, т. е. как фиксируют электромагнитные волны, излучаемые разными точками A, B, C поверхности тела (см. рис. 27). Одновременно с волной, излученной точкой C на поверхности тела, до фотопластинки доходят волны, излученные точками A и B в тот момент времени, когда они находились в положениях соответственно A' и B' . Иными словами, на фотопластинке в точках A'', B'', C'' одновременно регистрируется излучение точек A, B, C . Однако при этом до пластинки доходят волны, излученные в более далеких точках A и B в более ранние моменты времени. Найдем связь между углами наблюдения θ и θ' .

Учитывая указанную выше связь между углами наблюдения θ и θ' и углами излучения θ, θ' и формулу (22,5), мы можем написать

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin \theta}{1 + \frac{v \cos \theta}{c}}. \quad (22,23)$$

При этом в формуле (22,5) мы заменили углы θ и θ' на $\pi - \theta$, $\pi - \theta'$. Графически зависимость $\theta' = f(\theta)$ представлена на

рис. 28. Пунктиром на том же рисунке показана прямая $\vartheta' = \vartheta$, отвечающая случаю $v = 0$, т. е. регистрации на фотопластинке неподвижного по отношению к ней объекта. Рассмотрим прежде случай $\vartheta = \pi$. Это означает, что фотографируемое тело движется прямо к фотопластинке. При этом $\vartheta' = \pi$, т. е. мы получаем на пластинке изображение передней поверхности тела.

Пусть теперь угол ϑ имеет значение, меньшее $\pi - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Это значит, что угол наблюдения лежит вне узкого конуса около направления движения.

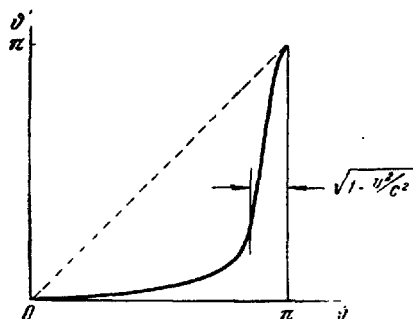


Рис. 28.

Из формулы (22,23) и графика на рис. 28 видно, что при $v \approx c$ значениям угла наблюдения $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ отвечают значения угла ϑ' , близкие к нулю. Углам ϑ' , близким к нулю, отвечают углы ϑ , близкие к π . Это значит, что при скоростях движения тела, близких к скорости света, на фотопластинку попадает излучение с тыльной стороны тела.

Подчеркнем, что этот результат относится к телу, движущемуся по направлению к фотографирующему устройству ($\vartheta > \frac{\pi}{2}$). Наблюдаемая при этом интенсивность может быть найдена из формулы (22,17). Именно, имеем

$$I_0(\vartheta) = I_0(\vartheta') \frac{d\Omega'}{d\Omega} = I_0(\vartheta') \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}.$$

Если угол $\vartheta < \pi - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, то наблюдаемая интенсивность света мала. Этот результат имеет простой смысл: при $v \sim c$ в системе K все излучение сконцентрировано в узком конусе с расствором $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в направлении скорости тела.

В общем случае можно сказать, что если фотографируемый объект движется со скоростью v и наблюдается под некоторым углом ϑ , то получается такая же картинка, что и при фотографировании неподвижного объекта, но видимого под углом ϑ' . Таким образом, изображение движущегося объекта на фотопластинке получается таким же, как на пластинке, неподвижной по отношению к объекту. Однако объект фотографирования ока-

зывается повернутым на угол $\phi' - \phi$. Так, при фотографировании шара на фотопластинке должен получиться круг, при фотографировании куба — куб, повернутый под разными углами, и т. п.

На рис. 29 схематически показано, как должно изменяться изображение куба на фотопластинке по мере приближения относительной скорости к скорости света. Точкам A, B, C, D куба отвечают на фотопластинке точки A', B', C', D' .

Мы видим, как постепенно происходит «поворот» изображения.

Приведенные соображения делают особенно ясной бессмысленность терминологии «кажущееся сокращение» в применении к лоренцеву сокращению.

Заметим, что вся картина усложняется, если объект наблюдается под большим телесным углом. В этом случае каждой точке объекта соответствует свой угол наблюдения ϕ , а следовательно, и свой поворот. Однако и в этом случае изображение сферы на фотопластинке должно быть кругом.

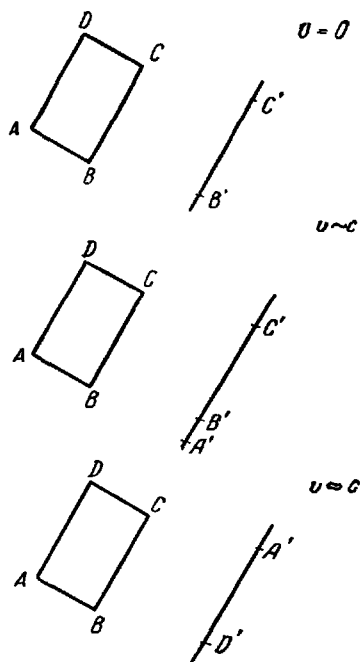


Рис. 29.

§ 23. Сила Лоренца; функции Лагранжа и Гамильтона частицы, движущейся в электромагнитном поле

В электродинамике было приведено выражение для силы, действующей на заряд, движущийся в электромагнитном поле. Эта сила, называемая силой Лоренца, была взята из опытных данных. Сейчас мы приведем простой вывод формулы для лоренцевой силы, основанный на преобразованиях векторов электромагнитного поля.

Рассмотрим некоторый заряд e , движущийся с произвольной скоростью v относительно неподвижной системы отсчета K . Пусть в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом, имеется электрическое поле E' . Тогда на заряд в системе отсчета K' действует сила

$$\mathcal{F}' = eE'. \quad (23,1)$$