зывается повернутым на угол $\vartheta' - \vartheta$. Так, при фотографировании шара на фотопластинке должен получиться круг, при фотографировании куба — куб, повернутый под разными углами, и т. п.

На рис. 29 схематически показано, как должно изменяться изображение куба на фотопластинке по мере приближения относительной скорости к скорости света. Точкам A, B, C, D куба отвечают на фотопластинке точки A', B', C', D'.

Мы видим, как постепенно происходит «поворот» изображения.

Приведенные соображения делают особенно ясной бессмысленность терминологии «кажущееся сокращение» в применении к лоренцеву сокращению.

Заметим, что вся картина усложняется, если объект наблюдается под большим телесным углом. В этом случае каждой точке объекта соответствует свой угол наблюдения ϑ, а следовательно, и свой поворот. Однако и в этом случае изображение сферы на фотопластинке должно быть кругом.

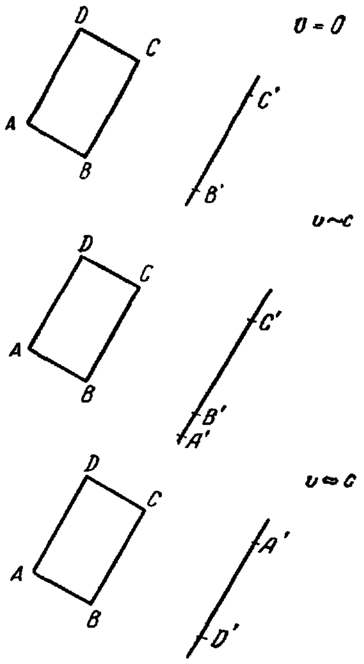

Рис. 29.

§ 23. Сила Лоренца; функции Лагранжа и Гамильтона частицы, движущейся в электромагнитном поле

В электродинамике было приведено выражение для силы, действующей на заряд, движущийся в электромагнитном поле. Эта сила, называемая силой Лоренца, была взята из опытных данных. Сейчас мы приведем простой вывод формулы для лоренцевой силы, основанный на преобразованиях векторов электромагнитного поля.

Рассмотрим некоторый заряд e, движущийся с произвольной скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно неподвижной системы отсчета K. Пусть в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом, имеется электрическое поле $\boldsymbol{E}'$. Тогда на заряд в системе отсчета K' действует сила

$$\mathscr{F}' = e\boldsymbol{E}'. \qquad (23,1)$$

Нашей задачей является нахождение силы, действующей на заряд в неподвижной системе отсчета (в которой он движется со скоростью v). Для этого необходимо выразить поле E' через электромагнитное поле E, а силу $\mathcal{F}'$ — через силу $\mathcal{F}$ в неподвижной системе отсчета. Первое преобразование дается непосредственно формулами § 21.

Формулы для преобразования силы можно получить следующим образом: найдем прежде всего формулы для преобразования компонент силы Минковского. Сила Минковского является 4-вектором, и ее компоненты преобразуются по общим формулам (11,1)—(11,4). В нашем случае в системе, движущейся вместе с зарядом, скорость $v'=0$ и поэтому $F_4'=0$. При этом

$$F_1=\frac{F_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad F_2=F_2';\quad F_3=F_3'.$$

Компоненты силы Минковского связаны с компонентами обычной силы $\mathcal{F}$ соотношениями типа (12,5).

В системе, движущейся вместе с зарядом, $v'=0$ и

$$F_1'=\mathcal{F}_x';\quad F_2'=\mathcal{F}_y';\quad F_3'=\mathcal{F}_z'.$$

В неподвижной системе по определению § 12

$$F_1=\frac{\mathcal{F}_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad F_2=\frac{\mathcal{F}_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad F_3=\frac{\mathcal{F}_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поэтому находим [1]) без труда

$$\mathcal{F}_x=\mathcal{F}_x';\quad \mathcal{F}_y=\mathcal{F}_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};\quad \mathcal{F}_z=\mathcal{F}_z'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{23,2}$$

Комбинируя (23,1), (23,2) и формулы преобразований (21,1)—(21,3), получаем выражения для компонент силы:

$$\mathcal{F}_x=\mathcal{F}_x'=eE_x'=eE_x, \tag{23,3}$$

$$\mathcal{F}_y=\mathcal{F}_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=eE_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=e\left(E_y-\frac{vH_z}{c}\right), \tag{23,4}$$

$$\mathcal{F}_z'=\mathcal{F}_z'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=eE_z'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=e\left(E_z+\frac{vH_y}{c}\right). \tag{23,5}$$

---

[1]) Подчеркнем, что приведенные формулы справедливы только для перехода от системы координат, движущейся вместе с частицей, к неподвижной системе.

В векторном виде:

$$\mathscr{F} = e\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right\}. \tag{23,6}$$

Таким образом, выражение для силы Лоренца получено чисто расчетным путем из общих соотношений теории относительности.

Напишем уравнения движения (12,3) для случая движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Первые три уравнения имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right\}. \tag{23,7}$$

При составлении четвертого уравнения нужно учесть, что работа силы в магнитном поле равна нулю (так как $\boldsymbol{v}[\boldsymbol{vH}] = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{vv}] = 0$) и, следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = \mathscr{F}\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{Ev}. \tag{23,8}$$

В последующих параграфах мы рассмотрим некоторые частные случаи движения частицы в электрическом и магнитном полях. Для дальнейшего нам понадобится выражение лоренцевой силы через электромагнитные потенциалы.

Имеем

$$\mathscr{F} = e\left\{-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]\right\}.$$

Воспользуемся формулой векторного анализа (I, 47)

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{Av}) = (\boldsymbol{A}\operatorname{grad})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A} + [\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}] + [\boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A} + [\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}].$$

При этом мы учли, что дифференцирование по координатам производится при постоянном значении скорости $\boldsymbol{v}$.

Пользуясь этой формулой, перепишем $\mathscr{F}$ в виде

$$\mathscr{F} = e\left\{-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{Av}) - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A}\right\} = e\operatorname{grad}\left(\frac{\boldsymbol{Av}}{c} - \varphi\right) - \frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt},$$

где полная производная (см. I, 7)

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A}.$$

Уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e\operatorname{grad}\left\{\frac{(\boldsymbol{Av})}{c} - \varphi\right\} - \frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}. \tag{23,9}$$

Эти уравнения движения можно рассматривать как уравнения Лагранжа, если функция Лагранжа имеет вид

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}). \tag{23,10}$$

Действительно, при этом обобщенный импульс

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}. \tag{23,11}$$

Соответственно обобщенная сила

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{e}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Уравнение Лагранжа гласит:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}},$$

или

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}. \tag{23,12}$$

Подстановка значений $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ в (23,12) вновь приводит нас к (23,9).

В нерелятивистском приближении функция Лагранжа приобретает вид

$$L \approx -mc^2\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}). \tag{23,13}$$

При этом мы опустили постоянную $(-mc^2)$, поскольку в уравнения Лагранжа входят лишь производные от L и сама L определена лишь с точностью до полной производной по времени[1].

Сравнивая функцию Лагранжа в обычном поле сил,

$$L = \frac{mv^2}{2} - U,$$

мы видим, что при движении в поле функция Лагранжа содержит еще член, зависящий от скорости и вектора-потенциала. Поэтому даже в нерелятивистском приближении функция Лагранжа в электромагнитном поле не может быть представлена в виде разности кинетической и потенциальной энергий.

---

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, стр 13.

Найдем еще функцию Гамильтона заряженной частицы в электромагнитном поле. Очевидно, имеем

$$H = \sum_{i=x,\,y,\,z} \dot{q}_i P_i - L = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P} - L = \boldsymbol{v}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) +$$
$$+ mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\varphi - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \qquad (23,14)$$

Для получения функции Гамильтона следует еще выразить скорость $\boldsymbol{v}$ через обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$. Проще всего это сделать, исходя из равенств

$$(H - e\varphi)^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad (23,15)$$

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2, \qquad (23,16)$$

которые получаются после возведения в квадрат (23,14) и (23,11). Переписывая (23,16) в виде

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m^2c^2 - m^2c^2 = \frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - m^2c^2 = \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2$$

и сравнивая с (23,15), получаем

$$(H - e\varphi)^2 = c^2\left\{m^2c^2 + \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\right\},$$

или

$$H = \sqrt{m^2c^4 + \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 c^2} + e\varphi. \qquad (23,17)$$

Как и следовало ожидать из общих соображений, функция Гамильтона в электромагнитном поле, по существу, совпадает с функцией Гамильтона в электростатическом поле: магнитное поле не изменяет энергию частицы.

В нерелятивистском приближении получаем из (23,17)

$$H \approx mc^2\sqrt{1 + \frac{\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{m^2c^2}} + e\varphi \approx mc^2 + \frac{\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m} + e\varphi. \qquad (23,18)$$

Последнее выражение, если не считать энергии покоя, совпадает с классическим выражением функции Гамильтона частицы в электромагнитном поле (см. ч. I, (41,4)).