§ 24. Движение частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Простейшим случаем движения релятивистских частиц является движение их в постоянных полях — электрическом и магнитном. Вместе с тем, движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях имеет очень большой практический интерес. Достаточно привести несколько примеров: изучение движения электронов в электрическом и магнитном полях позволило с большой степенью точности проверить релятивистское выражение для импульса; релятивистские формулы, определяющие закон движения частиц в электрическом и магнитном полях, представляют основу проектирования современных ускорителей ядерных частиц, позволяющих получать частицы релятивистских энергий. Изучение движения весьма быстрых частиц в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, служит для определения их импульса. Сочетание измерений импульса с определением энергии (производимым, например, по создаваемой частицами ионизации) дает возможность определить массу частиц.

Рассмотрим сначала движение релятивистской частицы в постоянном во времени и однородном в пространстве электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Направление вектора $\boldsymbol{E}$ выберем за ось x. Согласно § 12 уравнения движения имеют вид

$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x,$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

$$\frac{dE}{dt} = eE_x v_x = eE_x \frac{dx}{dt}.$$

В качестве первого примера рассмотрим движение заряда в поперечном электрическом поле. Пусть в момент времени $t=0$ заряд находился в точке $x=0$ и имел импульс $p_x = 0$, $p_y = p_0$, $p_z = 0$ и энергию

$$E_0 = \sqrt{p_0^2c^2 + m^2c^4}.$$

Это означает, что в начальный момент заряд двигался в направлении, перпендикулярном к полю. Интегрирование уравнений для компонент импульса в постоянном электрическом поле выполняется непосредственно и с учетом начальных условий дает

$$p_x = eE_x t, \quad p_y = p_0, \quad p_z = 0. \tag{24,1}$$

Уравнение для энергии также интегрируется непосредственно:

$$E = eE_x x + E_0.$$

С другой стороны,

$$E = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 + m^2c^4} =$$

$$= \sqrt{[(eE_xt)^2 + p_0^2]\,c^2 + m^2c^4} = \sqrt{(ecE_xt)^2 + E_0^2}.$$

Сравнивая два выражения для энергии, можем написать

$$\sqrt{(ecE_xt)^2 + E_0^2} = eE_xx + E_0. \tag{24,2}$$

Формулы (24,1) показывают, что движение является плоским и происходит в плоскости (xy). Для нахождения траектории можно составить отношение

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} : \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dy}. \tag{24,3}$$

Подставляя в (24,3) значение $\frac{p_x}{p_y}$ из (24,1), получаем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{eE_xt}{p_0}. \tag{24,4}$$

Для исключения времени воспользуемся формулой (24,2), которая дает

$$t = \frac{\sqrt{(eE_xx + E_0)^2 - E_0^2}}{ecE_x}.$$

Подставляя это выражение в (24,4), приходим к дифференциальному уравнению траектории

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(eE_xx + E_0)^2 - E_0^2}}{cp_0}.$$

Интегрирование дает уравнение траектории

$$\frac{y}{cp_0} = \int \frac{dx}{\sqrt{(eE_xx + E_0)^2 - E_0^2}} = \frac{1}{eE_x}\,\mathrm{arch}\,\frac{eE_xx}{E_0},$$

или

$$x = \frac{E_0}{eE_x}\,\mathrm{ch}\,\frac{eE_xy}{cp_0}. \tag{24,5}$$

Формула (24,5) показывает, что в поперечном электрическом поле заряд движется по цепной линии. При $v \ll c$ можно написать

$$E_0 \approx mc^2; \quad p_0 \approx mv_0 \quad \text{и} \quad x \approx \frac{mc^2}{eE_x}\,\mathrm{ch}\,\frac{eE_xy}{mv_0c}. \tag{24,6}$$

Если аргумент гиперболического косинуса, содержащий c в знаменателе, мал, то, разлагая (24,6) в ряд, приходим к классической формуле для траектории, найденной нами ранее (см. ч. I, § 39).

Вторым важным случаем является движение заряда вдоль электрического поля, т. е. случай начальных условий

$$p_x^{(0)}=0;\quad p_y^{(0)}=0;\quad p_z^{(0)}=0;\quad E^{(0)}=mc^2.$$

При этом поле будет считаться постоянным во времени, но произвольно изменяющимся в пространстве вдоль оси x.

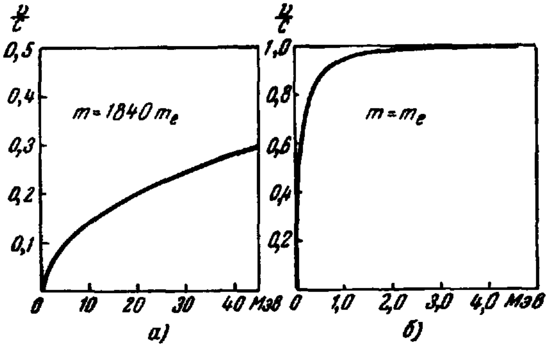

Рис. 30.

Интегрирование уравнений для компонент импульса дает

$$p_x=eE_x(x)t,\quad p_y=0,\quad p_z=0. \tag{24,7}$$

Уравнение для энергии запишем в виде

$$\frac{dE}{dt}=-e\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt}=-e\frac{d\varphi}{dt},$$

где φ — электростатический потенциал. Отсюда находим интеграл энергии

$$E+e\varphi=\text{const}=mc^2+e\varphi_0,$$

или

$$\Delta E=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)=eV, \tag{24,8}$$

где V — пройденная частицей разность потенциалов и ΔE — соответствующее изменение энергии. Скорость частицы, прошедшей разность потенциалов V, равна

$$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}\,\frac{1+\frac{e}{m}\frac{V}{2c^2}}{\left(1+\frac{e}{m}\frac{V}{c^2}\right)^2}}. \tag{24,9}$$

Это выражение постоянно используется на практике для вычисления скорости частицы, разгоняющейся в электрическом поле (рис. 30).

При $\frac{eV}{mc^2} \ll 1$ формула (24,9) переходит в классическое выражение (39,1) ч. I. Наоборот, при $\frac{eV}{mc^2} \gg 1$ с увеличением потенциала, скорость частицы стремится к постоянному пределу: $v \to c$.

Если поле однородно в пространстве, то зависимость скорости и координаты от времени получается непосредственно из (24,7). Именно, из (24,7) имеем

$$v = \frac{c\left(\frac{eE_x t}{mc}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{eE_x t}{mc}\right)^2}}. \tag{24,10}$$

Формула (24,10) дает закон равномерно-ускоренного движения в механике теории относительности. Под равномерно-ускоренным движением в теории относительности понимают следующее: введем множество инерциальных систем отсчета K_1', K_2', K_3', ..., движущихся со скоростями, равными скорости движения частицы в различные моменты времени. Каждая из систем отсчета K' называется мгновенно-сопутствующей частице. В мгновенно-сопутствующей системе скорость частицы равна нулю.

Поэтому согласно (11,12) и (11,16) компоненты 4-ускорения равны в K':

$$w_x' = \dot{v}_x' = \dot{v} = \frac{eE_x}{m}, \quad w_\tau' = 0.$$

В неподвижной системе отсчета, в силу (11,1),

$$w_x = \frac{w_x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{eE_x}{m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dot{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2\dot{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}.$$

Отсюда найдем величину $\dot{v}$, которую мы и будем называть ускорением:

$$\dot{v} = \frac{eE_x}{m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}. \tag{24,11}$$

Интегрируя (24,11), вновь приходим к формуле (24,10). Интегрируя (24,10), получаем закон движения:

$$x - x_0 = \frac{mc^2}{eE_x}\sqrt{1+\left(\frac{eE_x}{mc}t\right)^2}. \tag{24,12}$$

Это — уравнение гиперболы. Поэтому движение в постоянном поле в релятивистской механике часто именуется гиперболическим, в отличие от параболической траектории классической механики.

Наконец, рассмотрим движение частицы в постоянном и однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Направление последнего выберем за ось z. Тогда уравнения движения приобретают вид

$$\frac{dp_x}{dt}=\frac{e}{c}v_yH,\quad \frac{dp_y}{dt}=-\frac{e}{c}v_xH,\quad \frac{dp_z}{dt}=0,\quad \frac{dE}{dt}=0. \qquad (24,13)$$

Интегрируя уравнение для энергии, имеем

$$E=\text{const}=E_0.$$

При этом с помощью (13,20) получаем

$$\frac{dp_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c^2}v_x\right)=\frac{E_0}{c^2}\frac{dv_x}{dt};\qquad \frac{dp_y}{dt}=\frac{E_0}{c^2}\frac{dv_y}{dt}.$$

Поэтому уравнения для x-й и y-й компонент импульса можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{v_y}\frac{dv_x}{dt}&=\frac{ecH}{E_0},\\ \frac{1}{v_x}\frac{dv_y}{dt}&=-\frac{ecH}{E_0}.\end{aligned}\right\} \qquad (24,14)$$

Уравнениям (24,14) можно удовлетворить, положив

$$v_x=a\cos(\omega t+\alpha);\quad v_y=-a\sin(\omega t+\alpha). \qquad (24,15)$$

При этом для ω находим

$$\omega=\frac{ecH}{E_0}. \qquad (24,16)$$

Кроме того, подстановка (24,15) в (24,14) с учетом (24,16) дает

$$v_x^2+v_y^2=(v_\perp)^2=(v_\perp)_0^2=\text{const}.$$

Величина $(\boldsymbol{v}_\perp)_0$ представляет начальную скорость движения частицы в плоскости (xy), которая остается постоянной во времени.

Вторичное интегрирование приводит к уравнению траектории в плоскости (xy):

$$x=x_0+\frac{(v_\perp)_0}{\omega}\sin(\omega t+\alpha);\quad y=y_0+\frac{(v_\perp)_0}{\omega}\cos(\omega t+\alpha).$$

Вдоль оси z, как видно из (24,13), частица движется с постоянной скоростью:

$$z=z_0+(v_z)_0t.$$

Если, в частности, заряд в начальный момент не имел скорости вдоль оси z, т. е. $(v_z)_0 = 0$, траектория его представляет окружность в плоскости (xy), радиус которой равен

$$R = \frac{(v_\perp)_0}{\omega} = \frac{(v_\perp)_0 E_0}{ecH} = \frac{cp_0}{eH}, \tag{24,17}$$

где p_0 — начальный импульс.

Частота обращения по окружности ω пропорциональна напряженности магнитного поля и зависит от энергии E_0, которая остается постоянной при движении. При малых энергиях

$$E_0 \approx mc^2 \quad \text{и} \quad \omega \approx \frac{eH}{mc}, \tag{24,18}$$

т. е. переходит в циклотронную частоту, определенную в § 39 ч. I и не зависящую от энергии частицы.

Формулы (24,16) и (24,17) имеют весьма важное значение для современной ядерной физики и техники.

Измерение отклонения частиц в магнитном поле позволяет найти их импульс по формуле (24,17).

Формула (24,16) служит основой расчета современных циклотронов, позволяющих получить тяжелые частицы (протоны, дейтроны и α-частицы) с релятивистскими скоростями.

Как известно, в циклотроне частицы движутся в магнитном поле по окружности в разрезных коробках, именуемых дуантами, к которым приложено переменное напряжение. Промежуток между дуантами частицы проходят в ускоряющем электрическом поле. Таким образом описав полуокружность с неизменной скоростью, частица ускоряется, описывает следующую полуокружность с новым значением скорости и т. д. Для непрерывного разгона поле в ускоряющем промежутке в момент подхода частицы должно быть в определенной фазе. До тех пор, пока частицы не приобретут релятивистских скоростей, частота электрического поля, подаваемого на дуанты, определяется формулой (24,18) и не зависит от энергии частицы. Если, однако, скорость частиц достигает релятивистских значений, частота их обращения согласно (24,16) оказывается изменяющейся с энергией. Поэтому для дальнейшего разгона частиц необходимо изменять частоту ускоряющего поля в соответствии с формулой (24,16). Циклотроны, работающие в режиме переменной частоты, называются релятивистскими циклотронами или синхротронами.

Впервые расчет синхротронов был осуществлен 1944 г. В. И. Векслером, показавшим, что благодаря особым свойствам движения заряженных частиц (так называемой автофазировке) в синхротроне подвергаются ускорению частицы, поступающие в камеру ускорителя с различными начальными фазами движения.

Ускорение легких частиц — электронов — уже при сравнительно малых энергиях проводится в релятивистском режиме.

Одним из важнейших типов ускорителей является индукционный ускоритель — бетатрон. Принцип действия бетатрона заключается в следующем: в бетатроне электроны движутся в магнитном поле с аксиальной симметрией между полюсами электромагнита.

Если бы магнитное поле было постоянным во времени, движение электрона с постоянной скоростью совершалось бы по окружности радиуса R, даваемого формулой (24,17). В бетатроне, однако, напряженность магнитного поля изменяется во времени. Для конкретности будем считать, что напряженность магнитного поля возрастает во времени. Это изменение напряженности магнитного поля влечет за собой:

1) появление индуцированного электрического поля с напряженностью $\boldsymbol{E}$, определяемой формулой

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{S}$$

или

$$E_\varphi = -\frac{1}{2\pi Rc}\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\Phi = \int H\, dS$ — поток индукции через площадь круговой орбиты радиуса R; в силу осевой симметрии магнитного поля ясно, что электрическое поле направлено по касательной к окружности радиуса R; соответственно, на электрон будет действовать сила $(-eE_\varphi)$, также направленная по касательной к этой окружности; возрастание импульса электрона будет отвечать, согласно (24,17), возрастанию радиуса орбиты, т. е. стремлению электрона двигаться по развертывающейся спирали;

2) уменьшение радиуса окружности в (24,17) при росте напряженности H; это отвечает тенденции электрона двигаться по свертывающейся спирали.

Если подобрать закон изменения H во времени (и, как это будет видно из дальнейшего, в пространстве) так, чтобы обе тенденции точно компенсировали друг друга, электрон будет двигаться по окружности постоянного радиуса R с возрастающим импульсом. Это — так называемый бетатронный режим движения частицы.

Перейдем к выяснению условий, при которых будет иметь место подобный режим.

Изменение импульса электрона можно написать в виде

$$\frac{dp}{dt} = -eE_{\varphi} = \frac{e}{2\pi cR}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{24,19}$$

Если считать, что электрон движется по окружности постоянного радиуса, то, интегрируя (24,19), получаем

$$p = \frac{e}{2\pi cR}\Phi.$$

Постоянная интегрирования положена равной нулю в предположении, что в момент времени $t=0$ имеют место равенства $H=0$ и $v=0$.

Если подставить p в (24,17), то условие постоянства радиуса орбиты во времени можно представить в виде

$$R = \frac{cp}{eH} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Phi}{RH}. \tag{24,20}$$

Поток магнитной индукции через площадь орбиты равен

$$\Phi = \pi R^2 \overline{H},$$

где $\overline{H}$ — среднее поле внутри орбиты.

Тогда условие (24,20) сводится к равенству

$$H_{r=R} = \frac{\overline{H}}{2}.$$

Последнее означает, что для движения ускоряемого электрона по круговой орбите необходимо создать не только переменное во времени, но и неоднородное в пространстве магнитное поле. Поле на орбите должно быть равным половине средней напряженности внутри орбиты. Для выполнения этого требования поле должно спадать с увеличением радиуса r. Ясно, что ускорение частиц в бетатроне имеет прерывистый характер — оно происходит только при возрастании магнитного поля во времени. Мы не можем осветить здесь вопросы устойчивости движения частиц на орбите бетатрона, а также детали устройства реальных ускорителей [1]).

§ 25*. Система слабо взаимодействующих заряженных частиц

Мы можем теперь вернуться к системе частиц в релятивистской механике и рассмотреть упоминавшийся в § 15 случай частиц, связанных между собой электромагнитным взаимодействием [2]).

---

[1]) См., например, А. П. Гринберг, Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1950.

[2]) В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, 1955, стр. 105; Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960, стр. 203.