сительности можно построить общую механику системы взаимодействующих заряженных частиц. Однако в этом случае теория имеет приближенный характер и наименьшие удерживаемые в ней члены имеют порядок $\frac{v^2}{c^2}$. Учет последующих членов разложения по степеням $\left(\frac{v}{c}\right)$ возможен лишь в конкретных системах, не обладающих дипольным $\left(\text{члены } \left(\frac{v}{c}\right)^3\right)$, квадрупольным $\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$ и т. д. излучениями.

В дальнейшем нам понадобится другое представление энергии взаимодействия в том случае, когда система состоит из двух частиц. Записав функцию Лагранжа первой частицы в виде

$$L_1 = -m_1c^2\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} - e_1\varphi_1 + \frac{e_1}{c}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{A}_1),$$

будем считать φ_1 и $\boldsymbol{A}_1$ потенциалами поля, создаваемого второй частицей в той точке пространства, в которой в момент времени t находится первая частица. С учетом запаздывания и при произвольном законе движения потенциалы φ_1 и $\boldsymbol{A}_1$ представляют потенциалы Лиенара — Вихерта. Потенциалы Лиенара — Вихерта φ_1 и $\boldsymbol{A}_1$ связаны между собой формулой (25,5) ч. I:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_2\varphi_1}{c}.$$

Поэтому

$$L_1 = -m_1c^2\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} - e\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}{c^2}\right)\varphi_1.$$

Отсюда следует, что для энергии взаимодействия двух частиц можно написать выражение

$$U_{\text{вз}} = e\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}{c^2}\right)\varphi, \qquad (25,27)$$

где φ — потенциал поля, зависящий от мгновенного расстояния $R(\tau)$ между зарядами.

§ 26. Излучение движущегося заряда

Формула (28,4) ч. I для излучения движущегося заряда применима лишь при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. Для получения аналогичного выражения, справедливого при скоростях, близких к скорости света, введем в рассмотрение совокупность сопутствующих систем координат, в которых в каждый данный момент времени частица покоится.

В каждой из них для излучения справедлива формула (28,4) ч. I. Излучение, описываемое этой формулой, имеет характер сферических волн, так что полный импульс излученных электромагнитных волн равен нулю. Энергия, излучаемая зарядом в единицу времени, согласно (22,16) является инвариантом:

$$-\frac{dE}{dt}=-\frac{dE'}{dt'}=\ldots=\mathrm{invar}. \qquad (26,1)$$

Для потери энергии на излучение за единицу времени можно написать, согласно (28,4) ч. I,

$$\frac{dE'}{dt'}=-\frac{2e^2}{3c^3}(w')^2=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(w'_\alpha)^2, \qquad (26,2)$$

поскольку в сопутствующей системе координат $w'_\tau=0$. Импульс, теряемый на излучение в единицу времени, согласно (28,5) ч. I равен нулю:

$$\frac{dp'}{dt'}=0. \qquad (26,3)$$

Для нахождения излучения в произвольной системе (нештрихованной) отсчета следует лишь преобразовать квадрат ускорения $(w'_\alpha)^2$ по формуле (11,17) к ускорению в нештрихованной системе.

Тогда имеем

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE'}{dt'}=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\dot{v}^2-\left[\frac{v}{c},\dot{v}\right]^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\dot{v}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}(v\dot{v})^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}. \qquad (26,4)$$

При этом для изменения импульса в единицу времени с помощью (13,6), (26,2) и (26,4) получаем

$$\frac{dp}{dt}=\frac{v}{c^2}\frac{dE'}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\dot{v}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}(v\dot{v})^2}{\left(1-\frac{v_2}{c^2}\right)^3}\frac{v}{c^2}. \qquad (26,5)$$

Очевидно, при $\frac{v}{c}\ll 1$ формулы (26,4) и (26,5) переходят в (26,2) и (26,3).

Формулы (26,4) и (26,5) позволяют находить в произвольной, например лабораторной, системе отсчета энергию и импульс поля излучения, создаваемого ускоренно движущимся зарядом.

Обычно ускоренное движение быстро движущихся частиц связано с воздействием на них электромагнитного поля. Для преобразования формул (26,4) и (26,5) к этому частному случаю воспользуемся выражением (12,14) для ускорения частицы в электромагнитном поле; подставляя значение лоренцевой силы, находим

$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})\right\}. \qquad (26,6)$$

Используя это выражение для ускорения, имеем

$$\dot{v}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}^2) = \frac{e^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\left\{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{v^2}{c^4}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2 - \frac{2(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{c^2}\right\} + \frac{e^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3\frac{(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{c^2} =$$
$$= \frac{e^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\left\{\left(E+\frac{[\boldsymbol{v}H]}{c}\right)^2 - \frac{(\boldsymbol{v}E)^2}{c^2}\right\}. \qquad (26,7)$$

Излучение энергии в единицу времени зарядом, движущимся в электромагнитном поле, равно

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^2c^3}\frac{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$
$$= -\frac{2e^4}{3m^4c^7}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2\left\{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2\right\} =$$
$$= -\frac{2e^4}{3m^4c^7}E^2\left\{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2\right\}. \qquad (26,8)$$

Рассмотрим несколько случаев формулы (26,8) для ультрарелятивистского случая $v \approx c$.

Пусть имеется только электрическое поле (т. е. $\boldsymbol{H}=0$). Тогда

$$\frac{1}{E^2}\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^4c^7}\left\{(\boldsymbol{E})^2 - \frac{(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{c^2}\right\}. \qquad (26,9)$$

При $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{E}$ потеря энергии

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^4c^7}(\boldsymbol{E})^2E^2. \qquad (26,10)$$

При $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{E}$ потеря энергии

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^4E^2}{3m^4c^7}(\boldsymbol{E})^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{2e^4}{3m^2c^3}(\boldsymbol{E})^2 \qquad (26,11)$$

и от энергии не зависит.

При движении в магнитном поле, перпендикулярном к направлению скорости ($\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{H}$), и $\boldsymbol{E}=0$ находим

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}\frac{v^2H^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2e^4}{3m^4c^5}p^2H^2 \approx -\frac{2e^4}{3m^4c^7}E^2H^2, \quad (26,12)$$

где p — импульс частицы.

Формулы (26.9)—(26,12) используются в ядерной физике для определения потерь энергии ультрарелятивистскими частицами при движении в электрических и магнитных полях. Примером движения ультрарелятивистских частиц в магнитном поле может служить движение заряженных частиц в космических лучах в магнитном поле Земли и в магнитном поле бетатрона. Расчеты показали, что потери энергии на излучение в магнитном поле определяют верхний предел энергии частиц, могущих достигать поверхности Земли, а также верхний предел энергий, до которых электроны могут быть ускорены в бетатроне.

Важным применением полученных формул является расчет тормозного излучения ультрарелятивистских частиц в электрическом поле ядра. Ультрарелятивистский электрон, пролетающий мимо ядра, испытывает весьма малое отклонение. Его скорость можно считать постоянной, а ускорение — перпендикулярным к направлению скорости и равным $w_\perp = \frac{eE_\perp}{m}$, где

$$E_\perp = \frac{Ze\rho}{r^3}$$

— компонента поля ядра, перпендикулярная к скорости (направление последней выберем за ось x). Для поперечного ускорения можно пользоваться нерелятивистским выражением, поскольку соответствующая компонента скорости весьма мала. Как и в § 43 ч. I, ρ — прицельный параметр, а r — расстояние между ядром и электроном. При движении с постоянной скоростью можно считать, что

$$r = (\rho^2 + v^2t^2)^{1/2}.$$

Формула (26,10) дает для потери энергии в единицу времени

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3m^2c^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}(\boldsymbol{E}_\perp)^2 = -\frac{2Z^2e^4}{3m^2c^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\rho^2}{(\rho^2+v^2t^2)^3}.$$

Интегрируя по времени пролета, получаем полную потерю энергии ультрарелятивистской частицы на тормозное излучение

$$\Delta E = -\frac{2Z^2e^4}{3m^2c^3}\frac{\rho^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(\rho^2+v^2t^2)^3}.$$

Имеем, очевидно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{v^2t^2}{\rho^2}\right)^3} = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{v^2}{\rho^2}t^2\right)^3} = 2\frac{\rho}{v}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z\, dz = \frac{3}{8}\frac{\pi\rho}{v};$$

поэтому

$$\Delta E = -\frac{\pi}{4}\frac{Z^2e^4}{m^2c^3v}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{1}{\rho^3}. \tag{26,13}$$

Величина потерь энергии быстро растет с увеличением атомного номера Z вещества, в котором движется частица. Формула (26,13) определяет потери энергии одной частицы, пролетающей на расстоянии ρ от ядра. Она показывает, что потери быстро растут с уменьшением ρ.

На практике частица может пройти на любом расстоянии от ядра. Умножая (26,13) на $2\pi\rho\, d\rho n$, где n — плотность пучка, и интегрируя по всем значениям ρ, мы находим эффективное излучение пучка частиц

$$E_{\text{эфф}} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^4}{m^2c^3v}\frac{n}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\int\limits_{\rho_{\text{мин}}}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^4}{m^2c^3v}\frac{n}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{1}{\rho_{\text{мин}}}. \tag{26,14}$$

В формулу (26,14) введено минимальное приближение электрона к ядру $\rho_{\text{мин}}$, поскольку интеграл расходится на нижнем пределе. Введение этой неизвестной означает, что классическая теория излучения оказывается неприменимой для расчета тормозного излучения.

В квантовой механике будет показано, что классическое рассмотрение движения электрона неприменимо на малых расстояниях. Квантовомеханический расчет приводит к значению

$$\rho_{\text{мин}} = \frac{h}{mc}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

так что

$$E_{\text{эфф}} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^4}{mc^2h}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{26,15}$$

Формула (26,15) позволяет найти потери на тормозное излучение при прохождении весьма быстрых частиц в веществе.

Сравнение ее с формулой для потерь энергии на ионизацию показывает, что тормозное излучение является основным фактором, определяющим торможение быстрых электронов в веществе. Потери на тормозное излучение являются основными для электронов при энергиях порядка 200 mc^2 (100 *Мэв*). в воздухе и 20 mc^2 (10 *Мэв*) в свинце. У тяжелых частиц, например протонов, почти все потери связаны с ионизацией вплоть до очень больших энергий.

В заключение заметим, что нельзя непосредственно переходить от формулы (26,14) к нерелятивистской формуле (43,17) ч. I, полагая $v \ll c$. Формула (26,14) найдена для $v \approx c$, а не для общего случая произвольной скорости.