§ 4. Нормальное распределение и моменты

Возвращаясь к обсуждению свойств аддитивной величины $L=\sum_{k=1}^{N} L^{(k)}$, следует указать, что в теории вероятностей доказывается следующая, весьма важная теорема, именуемая центральной предельной теоремой теории вероятностей: при увеличении числа слагаемых в сумме (при $N\to\infty$) статистическое распределение вероятностей для величины L стремится к нормальному (гауссову) распределению, имеющему вид

$$\rho(L)\,dL=\frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{L^2}}}e^{-\frac{(L-\overline{L})^2}{\overline{(\Delta L)^2}}}\,dL. \tag{4,1}$$

В применении к физическим системам это означает, что нормальное распределение для аддитивных величин, например, энергии должно установиться во всякой физической системе, содержащей достаточно большое число независимых частиц. Мы не будем приводить доказательства центральной предельной теоремы, а ограничимся рассмотрением одного характерного примера.

Рассмотрим систему из N одинаковых статистически независимых частиц. Пусть вероятность того, что одна из частиц попадает в p-е состояние, равна p. Найдем вероятность того, что в этом состоянии окажется n частиц. Для этого напишем вероятность того, что n частиц находятся в состоянии p, а остальные $(N-n)$ частиц в других состояниях, в виде: $p^n(1-p)^{N-n}$ (на основании (3,4), поскольку частицы независимы).

Число способов, которым можно выбрать n произвольных частиц из общего числа N частиц, равно числу сочетаний из N элементов по n. Последнее равно $C_N^n=\frac{N!}{n!\,(N-n)!}$. Поэтому полная вероятность того, что n произвольно выбранных частиц одновременно окажутся в p-м состоянии, равна

$$w_N(n)=\frac{N!}{(N-n)!\,n!}p^n(1-p)^{N-n}. \tag{4,2}$$

Полученное выражение носит название биномиального закона. Будем считать теперь, что в системе содержится очень много частиц, так что $N\gg n$. Тогда можно написать, опуская n в показателе последнего множителя,

$$w_N(n)\cong\frac{N!}{n!\,(N-n)!}p^n(1-p)^N=\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}p^n(1-p)^N=$$

$$=\frac{(\bar{n})^n}{n!}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^N,$$

где обозначено $\bar{n} = pN$. Очевидно, что $\bar{n}$ представляет среднее число частиц в p-м состоянии. В пределе $N \to \infty$ получаем

$$w(n) = \lim_{N\to\infty} w_N(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}. \tag{4,3}$$

Последняя формула носит название формулы Пуассона. Наконец, найдем асимптотическое выражение формулы Пуассона для случая, когда не только N весьма велико, но велико также и число частиц n в данном состоянии. Это значит, что $\bar{n}$ и n можно считать большими (по сравнению с единицей) числами, а разность $n - \bar{n} \ll \bar{n}$. Логарифмируя формулу Пуассона, имеем

$$\ln w(n) = n \ln \bar{n} - \bar{n} - \ln n!$$

Пользуясь формулой Стирлинга (приложение IV), т. е. учитывая, что

$$\ln n! \simeq n \ln n - n,$$

можно окончательно записать

$$w(n) = \text{const} \cdot e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}^2}}.$$

Постоянная находится из условия нормировки. При больших значениях n суммирование можно заменить интегрированием. Тогда получаем

$$dw(n) = w(n)\,dn = \rho(n)\,dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}^2}}\,dn, \tag{4,4}$$

т. е. нормальное (гауссово) распределение вероятностей. Среднеквадратичная флуктуация числа частиц в рассматриваемом состоянии равна

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{(n-\bar{n})^2} = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = \int n^2\,dw(n) - \left(\int n\,dw(n)\right)^2 = \bar{n}. \tag{4,5}$$

В данном случае формула (3,7) оказывается не приближенной, а точной. Поэтому распределение Гаусса можно представить в виде

$$\rho(n)\,dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\overline{(\Delta\bar{n})^2}}}\,dn, \tag{4,6}$$

что совпадает с (4,1). Мы видим на частном примере, что при больших значениях чисел N и n устанавливается нормальное распределение вероятностей, причем в среднем отклонение чисел n от их средних значений достаточно мало.

Среднеквадратичная флуктуация характеризует эффективную ширину нормального распределения. Чем меньше $\overline{(\Delta n)^2}$, или в общем случае $\overline{(\Delta L)^2}$, тем меньше ширина гауссова распределения. В пределе $\overline{(\Delta L)^2} \to 0$ гауссово распределение превращается в δ-функцию. При этом вероятность найти значение $L \neq \overline{L}$ стремится к нулю, а вероятность значения $L = \overline{L}$ — к единице. Нормальное распределение имеет симметричный характер, так что $w(L) = w(-L)$, т. е. вероятность отклонения от среднего в обе стороны одинакова. Если распределение не является гауссовым, то оно, вообще говоря, не симметрично относительно знака L. Степень асимметрии распределения характеризуется величиной, именуемой асимметрией и равной

$$\overline{(\Delta L)^3} = \overline{L^3} - 3\overline{L} \cdot \overline{(\Delta L)^2} = \overline{L^3} - 3\overline{L} \cdot [\overline{L^2} - (\overline{L})^2]. \tag{4,7}$$

Среднеквадратичное отклонение и асимметрия выражаются через величины $\overline{L}$ и $\overline{L^n}$ $(n = 2,\ 3)$. Последние, определяемые в общем виде формулой

$$\overline{L^n} = \int L^n \rho(L)\, dL, \tag{4,8}$$

называются моментами n-го порядка. Оказывается, что если $\rho(L)$ — аналитическая функция, дифференцируемая сколько угодно раз, то совокупность моментов всех порядков $(\overline{L}, \overline{L^2}, \overline{L^3}, \ldots)$ полностью определяет вид функции $\rho(L)$. Действительно, совершая фурье-преобразование над $\rho(L)$, имеем

$$\psi(\omega) = \frac{1}{(2\pi)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(L)\, e^{i\omega L}\, dL. \tag{4,9}$$

Функция $\psi(\omega)$ называется характеристической функцией распределения вероятностей.

Дифференцируя (4,10) по ω и полагая затем $\omega = 0$, находим

$$\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)_{\omega=0} = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L\rho(L)\, dL = \overline{L} \cdot \left(\frac{i}{2\pi}\right),$$

$$\left(\frac{d^2\psi}{d\omega^2}\right)_{\omega=0} = \frac{i^2}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^2\rho(L)\, dL = \overline{L^2} \cdot \left(\frac{i^2}{2\pi}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d^n\psi}{d\omega^n}\right)_{\omega=0} = \frac{i^n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} L^n\rho(L)\, dL = \overline{L^n} \cdot \left(\frac{i^n}{2\pi}\right).$$

Поэтому если известны все моменты, то известны коэффициенты в разложении

$$\psi(\omega) = \psi(0) + \psi_0' \cdot \frac{\omega}{1!} + \psi_0'' \cdot \frac{\omega^2}{2!} + \ldots \tag{4,10}$$

и, следовательно, известна сама функция $\psi(\omega)$. Тогда распределение вероятностей получается непосредственно из преобразования.

$$\rho(L) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{4,11}$$

Иногда известны моменты $\overline{L^n}$, во всяком случае первые несколько моментов, но неизвестно само распределение вероятностей. Тогда, находя точно (или приближенно) характеристическую функцию $\psi(\omega)$, можно найти точно или приближенно само распределение вероятностей $\rho(L)$.

§ 5. Коррелятивная функция

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с рассмотрением случайных функций. Под случайной функцией понимают такую функцию $f(x)$, значения которой не находятся в однозначной зависимости от переменной x. При фиксированном значении x функция $f(x)$ может случайно принимать всевозможные значения. При этом можно говорить лишь о вероятности того, что при заданном x функция $f(x)$ имеет значение, лежащее между $f(x)$ и $f(x) + df(x)$. В дальнейшем для конкретности будем считать, что случайная величина зависит от времени, т. е. будем рассматривать случайную функцию времени $f(t)$. Процесс, описываемый случайной функцией времени, называется стохастическим. Физические примеры стохастических процессов и случайных функций, зависящих от времени, будут приведены ниже.

Важнейшей количественной характеристикой случайных процессов является их коррелятивная функция. Коррелятивной (или, точнее, автокоррелятивной) функцией $K(\tau)$ называется среднее (по времени или по ансамблю) значение произведения случайной функции, описывающей стохастический процесс в некоторой системе, взятой в момент времени t, и той же функции, взятой в момент $t+\tau$:

$$K(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t+\tau)\, dt, \tag{5,1}$$

где τ может быть как положительным, так и отрицательным. Для краткости мы будем обозначать

$$K(\tau) = \overline{f(t) f(t+\tau)}. \tag{5,2}$$

Черта означает усреднение по времени.

Наряду с временным усреднением, можно проводить усреднение по ансамблю тождественных физических систем, в которых происходит случайный физический процесс. В силу