и, следовательно, известна сама функция $\psi(\omega)$. Тогда распределение вероятностей получается непосредственно из преобразования.

$$\rho(L) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{4,11}$$

Иногда известны моменты $\overline{L^n}$, во всяком случае первые несколько моментов, но неизвестно само распределение вероятностей. Тогда, находя точно (или приближенно) характеристическую функцию $\psi(\omega)$, можно найти точно или приближенно само распределение вероятностей $\rho(L)$.

§ 5. Коррелятивная функция

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с рассмотрением случайных функций. Под случайной функцией понимают такую функцию $f(x)$, значения которой не находятся в однозначной зависимости от переменной x. При фиксированном значении x функция $f(x)$ может случайно принимать всевозможные значения. При этом можно говорить лишь о вероятности того, что при заданном x функция $f(x)$ имеет значение, лежащее между $f(x)$ и $f(x)+df(x)$. В дальнейшем для конкретности будем считать, что случайная величина зависит от времени, т. е. будем рассматривать случайную функцию времени $f(t)$. Процесс, описываемый случайной функцией времени, называется стохастическим. Физические примеры стохастических процессов и случайных функций, зависящих от времени, будут приведены ниже.

Важнейшей количественной характеристикой случайных процессов является их коррелятивная функция. Коррелятивной (или, точнее, автокоррелятивной) функцией $K(\tau)$ называется среднее (по времени или по ансамблю) значение произведения случайной функции, описывающей стохастический процесс в некоторой системе, взятой в момент времени t, и той же функции, взятой в момент $t+\tau$:

$$K(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t+\tau)\, dt, \tag{5,1}$$

где τ может быть как положительным, так и отрицательным. Для краткости мы будем обозначать

$$K(\tau) = \overline{f(t) f(t+\tau)}. \tag{5,2}$$

Черта означает усреднение по времени.

Наряду с временным усреднением, можно проводить усреднение по ансамблю тождественных физических систем, в которых происходит случайный физический процесс. В силу сказанного в § 2, оба усреднения являются эквивалентными. Поэтому можно написать

$$K(\tau)=\langle f(t)f(t+\tau)\rangle. \tag{5,3}$$

Скобками $\langle\,\rangle$ обозначено усреднение по ансамблю.

Коррелятивная функция $K(\tau)$ является количественной мерой связи между значениями случайной функции в последовательные моменты времени. Иными словами, коррелятивная функция $K(\tau)$ является мерой скорости изменения во времени функции $f(t)$, описывающей стохастический процесс.

Значения коррелятивной функции зависят только от τ, но не от выбора значения t. Действительно, в силу однородности времени, изменение начала отсчета не может влиять на значение величин, так что

$$K(\tau)=\overline{f(t)f(t+\tau)}=\overline{f(t')f(t'+\tau)}. \tag{5,4}$$

Если значения случайной функции $f(t)$ изменяются так быстро, что ее значение в момент времени $t+\tau$ совершенно не зависит от значения в момент времени t, то

$$K(\tau)=\overline{f(t)}\cdot\overline{f(t+\tau)}=0. \tag{5,5}$$

При $\tau\to\infty$ имеет место очевидное равенство

$$K(\tau\to\infty)\to 0, \tag{5,6}$$

именуемое свойством ослабления корреляции на бесконечности.

В другом предельном случае $\tau=0$ равенство

$$K(0)=\overline{[f(t)]^2}=\langle f^2(t)\rangle \tag{5,7}$$

показывает, что $K(0)$ совпадает со среднеквадратичным значением (вторым моментом) случайной функции $f(t)$. Наконец, симметрия стохастического процесса во времени (см. §§ 25 и 36) позволяет написать условие

$$K(\tau)=K(-\tau). \tag{5,8}$$

Конкретный вид коррелятивной функции зависит, разумеется, от природы случайного процесса. Однако существует некоторая теорема, связывающая между собой две важные характеристики случайного процесса — коррелятивную функцию и так называемую спектральную плотность мощности. Случайную функцию $f(t)$ можно разложить в интеграл Фурье, написав

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{5,9}$$

Частоты ω образуют непрерывный спектр.

Представим среднеквадратичное значение $\langle f^2\rangle$ в виде

$$\langle f^2(t)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\omega)\,d\omega = 2\int\limits_{0}^{\infty} I(\omega)\,d\omega, \tag{5,10}$$

где функция $I(\omega)$ носит название спектральной плотности. По определению, $I(\omega)$ — существенно положительная функция, причем $I(\omega) = I(-\omega)$.

Подставляя теперь (5,9) в определение $\langle f^2\rangle$ (5,7), находим

$$\langle f^2(t)\rangle = \int\int d\omega\,d\omega' e^{i(\omega+\omega')t} \langle f(\omega) f(\omega')\rangle. \tag{5,11}$$

Распишем выражение для $\langle f(\omega) f(\omega')\rangle$, воспользовавшись формулой обратного преобразования Фурье

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt. \tag{5,12}$$

Тогда получим

$$\langle f(\omega) f(\omega')\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{i(\omega t+\omega' t')}\langle f(t) f(t')\rangle\,dt'\,dt.$$

Полагая $t' = t+\tau$, имеем

$$\langle f(\omega) f(\omega')\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{i(\omega+\omega')t} e^{i\omega'\tau}\langle f(t) f(t+\tau)\rangle\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\int e^{i(\omega+\omega')t} e^{i\omega'\tau} K(\tau)\,dt\,d\tau. \tag{5,13}$$

Согласно (5,4) корреляти́вная функция $K(\tau)$ не зависит от t, и в последнем выражении можно вынести $K(\tau)$ из-под знака интегрирования по t:

$$\langle f(\omega) f(\omega')\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int e^{i\omega'\tau} K(\tau)\,d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+\omega')t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'\tau} K(\tau)\,d\tau\,\delta(\omega+\omega'). \tag{5,14}$$

Подставляя (5,14) в (5,11), имеем

$$\langle f^2(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int d\tau\,d\omega\,d\omega'\,e^{i\omega'\tau} K(\tau)\,\delta(\omega+\omega') =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\omega\,d\tau. \tag{5,15}$$

Сравнивая (5,15) и (5,10), получаем окончательно

$$I(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}K(\tau)\,d\tau. \tag{5,16}$$

Обращая последний интеграл, можем также написать

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}I(\omega)\,d\omega. \tag{5,17}$$

Формулы (5,17) и (5,16) составляют содержание теоремы Винера — Хинчина. Они связывают между собой коррелятивную функцию и спектральную плотность мощности. Последняя оказывается Фурье-компонентой коррелятивной функции.

С приложением теоремы Винера — Хинчина мы столкнемся при изучении стохастических процессов в физических системах.