ГЛАВА II

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

§ 6. Простейшая статистическая система — идеальный газ

Изучение систем, содержащих весьма большое число частиц, естественно начать с простейшего случая — идеального газа.

В газообразном состоянии плотность вещества мала, так что среднее расстояние между молекулами оказывается очень большим по сравнению с геометрическими размерами частиц — атомов или молекул. Благодаря этому основную долю всего времени движения каждая из частиц находится сравнительно далеко от остальных газовых частиц.

Силы межмолекулярного взаимодействия быстро убывают с расстоянием и становятся ничтожно малыми, когда молекулы находятся на расстояниях, заметно превышающих их геометрические размеры. Таким образом, характерной особенностью движения молекул в газе является малость межмолекулярного взаимодействия в течение подавляюще большой части времени движения. Из-за отсутствия взаимодействия газовые молекулы движутся прямолинейно и равномерно до тех пор, пока не произойдет столкновения между данной и какой-либо другой молекулой или соударения со стенкой сосуда. При столкновениях газовых молекул между собой или с молекулами стенки сосуда молекулы можно считать недеформируемыми. Это означает, что столкновения между молекулами происходят по тем же законам, что и столкновения обычных твердых шаров. В процессе столкновения между молекулами происходит обмен кинетической энергией и импульсом. Аналогично при столкновении молекулы со стенкой сосуда, точнее говоря, с молекулой вещества этой стенки, можно считать, что газовая молекула упруго отражается от стенки.

Статистическую систему, частицы которой взаимодействуют друг с другом только в процессе столкновений, а все остальное время движутся как свободные, мы будем именовать идеальным газом.

Движение каждой газовой молекулы строго определено законами механики (в первом приближении — классической механики). Поэтому в принципе, интегрируя уравнения движения всех молекул, входящих в состав газа, можно было бы найти траекторию каждой из них. Однако фактически подобного рода расчет сталкивается с огромными трудностями. Уже интегрирование уравнений движения трех взаимодействующих материальных точек (задача трех тел) является весьма сложной задачей, в общем случае еще не решенной. Общее решение задачи четырех тел является столь сложным, что пути ее решения даже не намечены. В газе же число взаимодействующих частиц выражается числами порядка 10^{20}. За самый короткий, с макроскопической точки зрения, промежуток времени в газе происходят бесчисленные столкновения молекул между собой и со стенками сосуда. Поэтому для нахождения траекторий всех молекул в газе нужно было бы записать и разрешить $3 \cdot 10^{20}$ связанных между собой уравнений движения с учетом соответствующих начальных условий. Из сказанного совершенно ясно, что подобная задача является не только практически, но и принципиально трудной.

На первый взгляд может показаться, что последнее утверждение вообще лишает нас возможности изучать физические закономерности в системах, состоящих из очень большого числа частиц. В действительности, однако это не так. Хотя каждая из частиц, входящих в состав системы, сама является «механической системой» и подчиняется законам механики, совокупность огромного числа молекул является системой, качественно отличной от системы, состоящей из небольшого числа молекул. В ней проявляются закономерности особого типа, совершенно не свойственные простым механическим системам и получившие название статистических закономерностей.

Действительно, рассмотрим газ, состоящий из огромного числа молекул и заключенный в замкнутый сосуд. Такой газ представляет механическую систему с огромным числом степеней свободы. Зная начальные условия, можно было бы в принципе проинтегрировать уравнения движения всех газовых молекул и найти их траектории. Оставляя в стороне вопрос о практической осуществимости такого расчета, необходимо заметить, что подобное решение не представляло бы никакого интереса. Мы хорошо знаем из опыта, что свойства газа фактически совершенно не зависят от начальных условий — начальных положений и скоростей молекул. Так, например, свойства газа в замкнутом сосуде совершенно не будут зависеть от характера заполнения сосуда: независимо от того, втекал ли газ через одно отверстие и постепенно или через два отверстия и быстро, по прошествии некоторого промежутка времени после впуска газ придет во вполне определенное состояние, в котором он и будет находиться в дальнейшем.

Мы скажем, что газ придет в состояние равновесия. Свойства газа в состоянии равновесия не зависят от его предыстории и не изменяются во времени.

Нам хорошо известно из опыта, что газ всегда стремится полностью и равномерно занять весь предоставленный ему объем. Поэтому такой характер движения газа, при котором плотность газа была бы неодинаковой в различных частях сосуда, является исключенным или, точнее, крайне мало вероятным. Никакого явного противоречия с законами механики при этом не возникло бы. Если бы состояние системы зависело от начальных условий, то последние принципиально можно было бы подобрать так, чтобы плотность газа в разных частях сосуда была различной. То обстоятельство, что состояние газа не зависит от начальных условий положения и скоростей его молекул, совершенно обесценивает знание траектории отдельных молекул. Предположим, что мы сумели преодолеть все математические трудности и нашли траекторию отдельной молекулы. Пусть при этом оказалось, что траектория данной молекулы почти целиком проходит в одном из углов куба. Ясно, что из этого мы не смогли бы вывести каких-либо заключений о поведении всего газа.

Газ как целое, содержащий огромное число частиц, является системой, качественно отличной от отдельной молекулы, и его поведение подчиняется иным, статистическим закономерностям. В этом смысле один из создателей статистической физики, Смолуховский, писал, что если бы даже мы умели находить траектории газовых молекул, все равно при описании свойств газа пользовались бы законами теории вероятностей.

При отыскании статистических закономерностей будем искать среднее значение величин, характеризующих состояние газа как целого. Благодаря тому, что число частиц в газе весьма велико, из результатов § 3 следует, что найденные средние будут с огромной степенью точности совпадать с истинными значениями величин.

Предыдущие рассуждения позволили нам выявить важнейшую особенность «массовых» процессов, т. е. таких процессов, которые характеризуются наличием большого числа более или менее равноправных событий. Эта особенность заключается в том, что в таких процессах проявляются своеобразные статистические закономерности, совершенно не свойственные отдельным системам или процессам.

Рассмотрим некоторый замкнутый сосуд, заполненный газом. Предположим, что в газе установилось состояние равновесия. Попытаемся установить статистические законы, определяющие поведение газа. В соответствии с прямыми данными опыта будем предполагать, что молекулы газа распределяются по всему объему замкнутого сосуда с равномерной плотностью (т. е. что число молекул в единице объема постоянно по всему сосуду). Будем также предполагать, что молекулы газа обладают скоростями, равномерно распределенными по всем направлениям в пространстве. Это означает, что число молекул, движущихся во всех направлениях, должно быть одинаковым. Если бы это было не так и существовало бы направление преимущественного движения молекул, то в этом направлении возник бы поток газа. Из опыта следует, что в газе, заключенном в замкнутый сосуд и не подвергающемся воздействию извне, возникновение установившегося потока газа невозможно. Предположение о равномерном распределении молекул в пространстве и равномерном распределении скоростей по всем направлениям называют предположением о молекулярном хаосе.

Естественно, возникает вопрос, каким образом устанавливается равномерное распределение скоростей молекул во всех направлениях. Ясно, что если бы молекулы совершенно не взаимодействовали между собой, то не было бы никаких причин, которые могли бы изменить первоначальное направление движения молекул. Поэтому наличие или отсутствие направленного потока целиком определялось бы начальными условиями. Установление молекулярного хаоса обусловлено существованием взаимодействия между молекулами. При столкновениях между молекулами направления их движения непрерывно изменяются, и в газе устанавливается хаотическое движение с равномерным распределением скоростей по направлениям в пространстве.

Роль молекулярных столкновений не сводится только к установлению равномерного распределения скоростей по направлениям. При столкновениях молекул наряду с изменением направления полета происходит также изменение скоростей молекул по абсолютной величине. Если бы в начальный момент времени все молекулы имели одинаковые скорости, то беспорядочные столкновения между ними привели бы к тому, что часть молекул случайно получила бы избыточную кинетическую энергию за счет других молекул, соответственно потерявших часть энергии. Благодаря этому равенство скоростей газовых молекул нарушится и в газе появится некоторая часть молекул, имеющих бóльшие и меньшие скорости. Иными словами, в газе возникнет некоторое распределение молекул по скоростям. В газе появится некоторое число молекул, имеющих большие скорости, и некоторое число молекул со средними и малыми скоростями.

Нашей задачей является нахождение распределения молекул идеального газа по скоростям. Это распределение будет характеризоваться средним числом молекул, имеющих данное значение скорости.

Из предположения о хаотическом характере молекулярного движения следует, что возможно появление молекул с любыми скоростями, так что распределение молекул можно характеризовать некоторой непрерывной функцией. Поскольку скорости движения молекул изменяются непрерывно, нужно, конечно, говорить не о числе молекул, имеющих точно заданную скорость, а о числе молекул, имеющих скорость, близкую к данной.

§ 7. Распределение Максвелла

Обозначим через $dn_{\mathbf{v}}$ среднее число молекул в единице объема газа, имеющих компоненты скорости, лежащие в интервале между v_x и $v_x + dv_x$, v_y и $v_y + dv_y$, v_z и $v_z + dv_z$.

Мы будем считать, что газ находится в стационарном состоянии, так что установилось состояние молекулярного хаоса и оно не изменяется во времени. При этом число частиц с данными компонентами скорости не зависит от времени.

Ясно, что среднее число молекул $dn_{\mathbf{v}}$ можно представить в следующем виде:

$$dn_{\mathbf{v}} = n(v_x, v_y, v_z)\,d\mathbf{v} = n(\mathbf{v})\,dv_x dv_y dv_z, \tag{7,1}$$

где $n(v_x, v_y, v_z) = n(\mathbf{v})$ — среднее число молекул с компонентами скорости v_x, v_y, v_z в единичном интервале. Функция $n(\mathbf{v})$ получила название функции распределения молекул по скоростям.

Если интервал $d\mathbf{v} = dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$ достаточно велик для того, чтобы в нем могло находиться сравнительно большое число молекул, то функция распределения будет плавно изменяться с изменением значения своих аргументов.

Поскольку все направления движения молекул в пространстве равноправны, распределение скоростей должно быть изотропным и функция распределения $n(\mathbf{v})$ не может зависеть от направления скорости. Это означает, что $n(v_x, v_y, v_z)$ не может быть произвольной функцией от компонент скорости v_x, v_y, v_z, но должна являться функцией аргумента $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, т. е. абсолютной величины скорости, и

$$dn_{\mathbf{v}} = dn_v. \tag{7,2}$$

Переходя от компонент скорости к ее абсолютной величине и направлению, которое характеризуется полярными углами ϑ и ψ, можем в силу (I, 67) написать

$$dn_v = n(v)\,v^2\,dv\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi. \tag{7,3}$$