Число молекул в единице объема, скорость которых лежит между v и $v + dv$, таким образом, равно

$$dn_v = 4\pi n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} v^2 \, dv. \tag{7,16}$$

Формула (7,16) носит название распределения Максвелла.

Наряду с распределением по скоростям можно написать также распределение по компонентам скоростей:

$$dv_n = n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)} \, dv_x \, dv_y \, dv_z. \tag{7,17}$$

Переход от (7,16) к (7,17) соответствует обычному преобразованию координат от полярных к декартовым.

В формуле (7,17) можно считать, что компоненты скорости изменяются в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Заметим, что функция распределения по компонентам скоростей может быть записана в виде произведения трех функций распределения по компонентам скоростей:

$$dn_v = dn_{v_x} \, dn_{v_y} \, dn_{v_z} =$$
$$= n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha v_x^2} \, dv_x\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \, e^{-\alpha v_y^2} \, dv_y\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha v_z^2} \, dv_z\right). \tag{7,18}$$

Прежде чем перейти к обсуждению результатов, вытекающих из распределений (7,16) или (7,17), необходимо выяснить смысл фигурирующего в них параметра α.

§ 8. Столкновения молекул со стенкой сосуда. Давление. Связь параметра α с абсолютной температурой

В процессе движения молекулы газа, заключенного в некоторый сосуд, испытывают соударения с его стенками. Стенки сосуда не образуют геометрически резкой границы, но имеют молекулярное строение. Газовая молекула, приближающаяся к стенке, испытывает со стороны молекул последней весьма сильное отталкивание и отражается внутрь сосуда. На рис. 35 изображен схематический ход потенциальной энергии молекулы вблизи стенки сосуда. Последнюю мы можем рассматривать как бесконечно высокий потенциальный барьер, непроницаемый для молекул. Можно считать, что отражение молекулы от стенки сосуда происходит совершенно упруго. Это означает, что компонента скорости, перпендикулярная к плоскости стенки, при отражении изменяется на прямо противоположную.

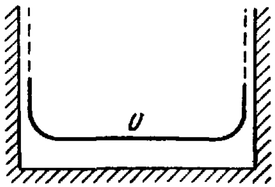

Рис. 35.

Рассмотрим некоторую площадку стенки dS, перпендикулярную к оси x. Тогда при отражении от этой площадки молекула, имевшая компоненты скорости v_x, v_y, v_z, приобретает компоненты скорости $-v_x$, v_y, v_z. При отражении молекулы от площадки происходит изменение компоненты импульса по оси x от значения mv_x до значения $-mv_x$, т. е. на величину $2mv_x$. Этот импульс передается отражающей стенке.

Таким образом, столкновения молекул со стенкой будут приводить к появлению силы, действующей на поверхность сосуда. Силу, действующую на единицу поверхности стенки со стороны всех молекул газа, мы отождествим с макроскопическим давлением. Это утверждение, являющееся, в сущности, основой кинетической теории газов, казалось в свое время весьма радикальным. Однако сейчас оно представляется естественным и совершенно очевидным.

Для нахождения давления, оказываемого на стенку сосуда, нужно вычислить полное изменение количества движения молекул газа, испытывающих отражение от единицы поверхности сосуда в единицу времени. Оно равно, очевидно, изменению импульса в одном соударении со стенкой, умноженному на полное число ударов, приходящихся на 1 *см*^{2} поверхности за 1 *сек*. Изменение импульса равно $2mv_x$. Умножив это выражение на число ударов, приходящихся на 1 *см*^{2} стенки за 1 секунду, со стороны молекул, имеющих данную компоненту скорости v_x, и суммируя или, точнее, интегрируя это произведение по всем значениям v_x, мы найдем искомое давление. В единицу времени поверхности стенки будут достигать все молекулы, находящиеся от нее на расстоянии, меньшем или равном v_x (поскольку v_x — путь, проходимый в единицу времени молекулой, движущейся в положительном направлении оси x). На 1 *см*^{2} поверхности за 1 *сек* будут попадать все молекулы, находящиеся в параллелепипеде высотой v_x и с основанием 1 *см*^{2} (рис. 36). Объем этого параллелепипеда равен, очевидно, v_x *см*^{3}. В нем находится $dn_v v_x$ молекул, компоненты скорости которых лежат между v_x и $v_x + dv_x$; v_y и $v_y + dv_y$; v_z и $v_z + dv_z$. Поверхности стенки будут достигать все молекулы, находящиеся в указанном параллелепипеде, независимо от значений компонент скорости v_y и v_z, параллельных этой поверхности[1]).

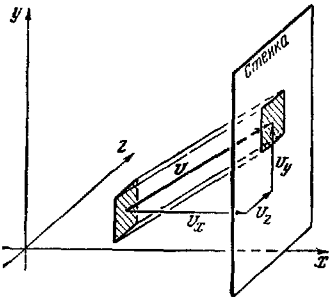

Рис. 36.

[1]) Это рассуждение носит качественный характер. В нем не учитываются столкновения между молекулами, их взаимодействие со стенкой и т. п. Оно имеет скорее характер общей схемы расчета давления газа.

Число частиц с данной компонентой скорости v_x (при произвольных значениях двух других компонент v_y и v_z) в единице объема равно

$$dn_{v_x} = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v_x^2}\, dv_x \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\alpha\left(v_y^2+v_z^2\right)}\, dv_y\, dv_z = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha v_x^2}\, dv_x.$$

Число частиц, находящихся в параллелепипеде, имеющем объем v_x, соответственно равно

$$d\nu = v_x\, dn_{v_x} = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha v_x^2}\, v_x\, dv_x. \tag{8,1}$$

Это выражение дает число молекул, имеющих данное значение компоненты скорости v_x и достигающих 1 *см*^{2} поверхности стенки за 1 *сек*.

Каждая из $d\nu$ молекул, ударяющихся о стенку, передает ей импульс $2mv_x$, так что за 1 *сек* молекулы с данным значением v_x передают стенке импульс, равный $2mv_x d\nu$. Интегрируя последнее выражение по всем возможным значениям компоненты скорости v_x, мы найдем искомый импульс, передаваемый 1 *см*^{2} поверхности стенки за 1 *сек* всеми ударяющимися об ее поверхность молекулами газа. Переданный за 1 секунду импульс равен, очевидно, силе, действующей на 1 *см*^{2} поверхности, т. е. давлению газа p:

$$p = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} (2mv_x)\, e^{-\alpha v_x^2}\, v_x\, dv_x. \tag{8,2}$$

Интегрирование в (8,2) ведется только по положительным значениям v_x, поскольку молекулы с отрицательными значениями компоненты скорости по оси x движутся не к рассматриваемой стенке, а от нее[1]), и дает

$$p = \frac{m}{2\alpha} n, \tag{8,3}$$

или

$$p = \frac{m}{2\alpha}\frac{N}{V}. \tag{8,4}$$

Для определения числового значения α необходимо сопоставить уравнение (8,4) с экспериментальным значением давления достаточно разреженного газа. Последнее дается формулой уравнения состояния

$$pV = NkT.$$

[1]) В выражении (8,2) не учитываются столкновения молекул между собой Однако молекулы, не достигающие стенки, передают свой импульс молекулам, долетающим до стенки.

Сравнивая это выражение с (8,4), мы видим, что параметр α связан с абсолютной температурой T соотношением

$$\alpha = \frac{m}{2kT}. \tag{8,5}$$

Равенство (8,5) подтверждает, что формально введенный нами параметр α является существенно положительной величиной. При определении связи между α и температурой T нам пришлось прибегнуть к данным эксперимента. В дальнейшем нам придется столкнуться с параметром, аналогичным α. Тогда вопрос об определении смысла и значения параметра будет обсужден детальнее. Мы увидим, что смысл параметра α может быть выяснен без непосредственного привлечения данных эксперимента.

Найдем еще число ν ударов молекул об 1 *см*^{2} стенки за 1 *сек*. Формула (8,1) дает число молекул, достигающих стенки за секунду и имеющих скорость между v_x и $v_x + dv_x$. Полное число молекул, ударяющихся об 1 *см*^{2} стенки за 1 *сек*, получается интегрированием (8,1) по всем значениям v_x от нуля до бесконечности. Это дает

$$\nu = n\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha v_x^2} v_x\, dv_x = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \tag{8,6}$$

§ 9. Свойства распределения Максвелла

Перепишем теперь распределения Максвелла (7,17) и (7,16), выразив в них параметр α через абсолютную температуру газа:

$$dn_v = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}}\, dv_x\, dv_y\, dv_z, \tag{9,1}$$

$$dn_v = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, v^2\, dv. \tag{9,2}$$

Вместо того чтобы пользоваться распределением частиц газа по состояниям, мы можем ввести эквивалентное ему распределение вероятностей того, что отдельная частица попадает в данное состояние.

Если среднее число молекул в 1 *см*^{3} газа, имеющих данную скорость, равно dn, а полное число молекул равно n, то, очевидно, вероятность того, что некоторая произвольно выбранная молекула попадает в состояние с данной скоростью, равна

$$dw = \frac{dn}{n}.$$