

Сравнивая это выражение с (8,4), мы видим, что параметр α связан с абсолютной температурой T соотношением

$$\alpha = \frac{m}{2kT}. \quad (8,5)$$

Равенство (8,5) подтверждает, что формально введенный нами параметр α является существенно положительной величиной. При определении связи между α и температурой T нам пришлось прибегнуть к данным эксперимента. В дальнейшем нам придется столкнуться с параметром, аналогичным α . Тогда вопрос об определении смысла и значения параметра будет обсужден детальнее. Мы увидим, что смысл параметра α может быть выяснен без непосредственного привлечения данных эксперимента.

Найдем еще число ν ударов молекул об 1 см^2 стенки за 1 сек. Формула (8,1) дает число молекул, достигающих стенки за секунду и имеющих скорость между v_x и $v_x + dv_x$. Полное число молекул, ударяющихся об 1 см^2 стенки за 1 сек, получается интегрированием (8,1) по всем значениям v_x от нуля до бесконечности. Это дает

$$\nu = n \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} v_x dv_x = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \quad (8,6)$$

§ 9. Свойства распределения Максвелла

Перепишем теперь распределения Максвелла (7,17) и (7,16), выразив в них параметр α через абсолютную температуру газа:

$$dn_v = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z, \quad (9,1)$$

$$dn_v = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (9,2)$$

Вместо того чтобы пользоваться распределением частиц газа по состояниям, мы можем ввести эквивалентное ему распределение вероятностей того, что отдельная частица попадает в данное состояние.

Если среднее число молекул в 1 см^3 газа, имеющих данную скорость, равно dn , а полное число молекул равно n , то, очевидно, вероятность того, что некоторая произвольно выбранная молекула попадает в состояние с данной скоростью, равна

$$d\omega = \frac{dn}{n}.$$

Поэтому функцию распределения Максвелла можно трактовать как функцию распределения вероятностей того, что отдельная молекула попадает в данное состояние. Последнее характеризуется значениями компонент скоростей v_x , v_y и v_z .

На рис. 37 и 38 изображены функции распределения плотности вероятности $\left(\frac{1}{n} \frac{dn_{v_x}}{dv_x}\right)$ и соответственно $\left(\frac{1}{n} \frac{dn_v}{dv}\right)$ по компонентам скорости и абсолютной величине скорости. Поскольку невозможно изобразить графически функцию трех переменных, на рис. 37 по оси ординат отложено значение $\frac{1}{n} \frac{dn_{v_x}}{dv_x}$, а по оси абсцисс — величина $\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} v_x$.

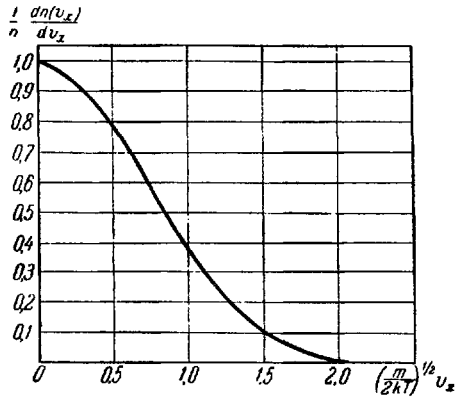


Рис. 37.

На рис. 38 по оси ординат отложена функция $\frac{1}{n} \frac{dn_v}{dv}$, по оси абсцисс — величина $\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} v$.

Число молекул в газе с очень малыми и очень большими скоростями оказывается сравнительно небольшим. Тем не менее, всегда можно найти известное число очень быстрых и очень медленных молекул. На первый взгляд может показаться странным, что функция распределения по скоростям имеет максимум. Действительно, множитель $e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ экспоненциально убывает с квадратом скорости молекулы. Поэтому число молекул с данной скоростью должно быть тем меньше, чем больше скорость. Однако второй множитель v^2 изменяется в противоположном направлении и растет с ростом скорости. Этот множитель характеризует число состояний молекулы, имеющих

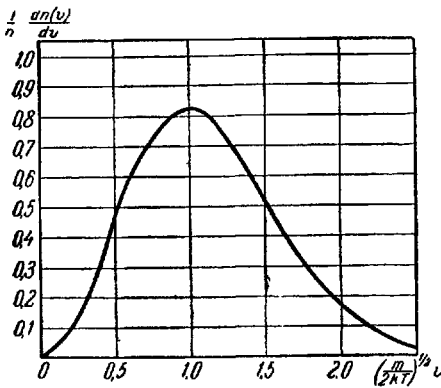


Рис. 38.

Этот множитель характеризует число состояний молекулы, имеющих

скорость, меньшую данной. Конкуренция обоих множителей приводит к появлению максимума в функции распределения.

С ростом температуры распределение становится все более пологим. Это означает, что относительное число молекул с данным большим значением скорости постепенно возрастает. На рис. 39 изображено изменение распределения Максвелла с ростом температуры (для молекул кислорода).

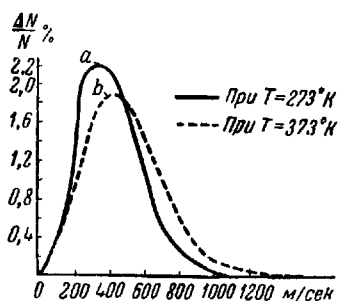


Рис. 39.

Наряду с распределением молекул по скоростям часто приходится пользоваться распределениями по импульсам и энергиям.

Вводя в распределение (7,17) новые переменные

$$p_x = mv_x,$$

$$p_y = mv_y,$$

$$p_z = mv_z,$$

находим для числа молекул с данным импульсом

$$dn_p = n \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z. \quad (9,3)$$

Аналогично число молекул с абсолютным значением импульса, лежащим между p и $p + dp$, будет равно

$$dn_p = 4\pi n \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp. \quad (9,4)$$

Выражая импульс через энергию молекулы $p = \sqrt{2me}$, получаем для числа частиц с данной энергией e выражение

$$dn_e = n \frac{2}{\sqrt{\pi (kT)^3}} e^{-\frac{e}{kT}} \sqrt{e} de. \quad (9,5)$$

Экспериментальная проверка распределения Максвелла являлась одной из важнейших задач молекулярной физики. Поэтому было разработано несколько методов измерения распределения скоростей. Самым наглядным из них является опыт, идентичный известному опыту Физо по определению скорости света.

Молекулы, испаряющиеся с поверхности раскаленной нити, пропускаются через систему щелей — линз, образующих узкий молекулярный пучок, летящий в вакууме по направлению к ловушке. На пути пучка устанавливаются два вращающихся диска с прорезями, через которые должен проникнуть пучок. Для того чтобы молекулы, имеющие скорость v_x , могли проникнуть через обе щели при заданной угловой скорости ω враще-

ния дисков и расстоянии l между ними, щели должны быть смещены на угол φ , равный

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{v_x}.$$

Таким образом, каждой скорости v_x при заданной угловой скорости ω отвечает определенный сдвиг дисков на угол φ .

Число частиц в пучке, обладающих данной скоростью, определяется непосредственно по фотометрическому измерению толщины осадка в ловушке, охлаждаемой жидким воздухом.

После пересчета распределения скоростей в молекулярном пучке на распределение скоростей в изотропных условиях получается гистограмма, изображенная на рис. 40. Кривая на том же рисунке представляет распределение Максвелла (для паров ртути).

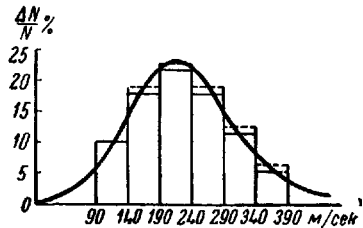


Рис. 40.

Другой весьма точный метод измерения распределения скоростей в молекулярном пучке паров лития, натрия или им подобных газов основан на изучении поведения пучка в магнитном поле, перпендикулярном к направлению движения этого пучка. Он представляет повторение известного опыта Штерна и Герлаха для определения магнитных моментов, но детально не может быть здесь описан (см. ч. V).

§ 10. Вычисление характерных величин

Зная распределения (9,1) и (9,5), можно найти средние значения любых величин, характеризующих свойства газовых молекул. Найдем прежде всего среднее значение какой-либо компоненты скорости, например \bar{v}_x . По определению среднего значения

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \int v_x d\omega = \int v_x \frac{dn_v}{n} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_y dv_z. \end{aligned}$$

Интеграл по dv_x , который берется от нечетной функции, равен нулю. Поэтому среднее значение v_x равно нулю:

$$\bar{v}_x = 0.$$

Этот результат является совершенно очевидным. Он показывает, что оба направления движения вдоль оси x являются равновероятными.