

ния дисков и расстоянии l между ними, щели должны быть смещены на угол φ , равный

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{v_x}.$$

Таким образом, каждой скорости v_x при заданной угловой скорости ω отвечает определенный сдвиг дисков на угол φ .

Число частиц в пучке, обладающих данной скоростью, определяется непосредственно по фотометрическому измерению толщины осадка в ловушке, охлаждаемой жидким воздухом.

После пересчета распределения скоростей в молекулярном пучке на распределение скоростей в изотропных условиях получается гистограмма, изображенная на рис. 40. Кривая на том же рисунке представляет распределение Максвелла (для паров ртути).

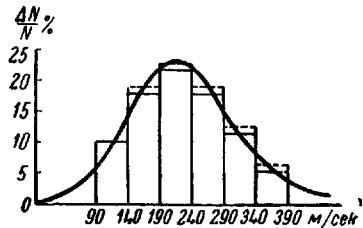


Рис. 40.

Другой весьма точный метод измерения распределения скоростей в молекулярном пучке паров лития, натрия или им подобных газов основан на изучении поведения пучка в магнитном поле, перпендикулярном к направлению движения этого пучка. Он представляет повторение известного опыта Штерна и Герлаха для определения магнитных моментов, но детально не может быть здесь описан (см. ч. V).

§ 10. Вычисление характерных величин

Зная распределения (9,1) и (9,5), можно найти средние значения любых величин, характеризующих свойства газовых молекул. Найдем прежде всего среднее значение какой-либо компоненты скорости, например \bar{v}_x . По определению среднего значения

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \int v_x d\omega = \int v_x \frac{dn_v}{n} = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_y dv_z. \end{aligned}$$

Интеграл по dv_x , который берется от нечетной функции, равен нулю. Поэтому среднее значение v_x равно нулю:

$$\bar{v}_x = 0.$$

Этот результат является совершенно очевидным. Он показывает, что оба направления движения вдоль оси x являются равновероятными.

Аналогичный результат мы получили бы при вычислении любой другой компоненты скорости.

Найдем теперь среднее значение абсолютной величины скорости. Имеем

$$\bar{v} = \int v \frac{dn_v}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} = 1,13 \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (10,1)$$

В соответствии со сказанным выше средняя скорость молекулы возрастает с ростом температуры. Это возрастание пропорционально корню из абсолютной температуры газа. Мы видим также, что средняя скорость молекул обратно пропорциональна корню квадратному из массы молекулы.

Большой интерес представляет среднее значение кинетической энергии газовой молекулы $\bar{\epsilon}$. Оно равно, в силу (9,5),

$$\bar{\epsilon} = \int \epsilon \frac{dn_{\epsilon}}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \epsilon^{1/2} d\epsilon.$$

При вычислении последнего интеграла нужно ввести новую переменную $x = \sqrt{\epsilon}$. Простое вычисление приводит к формуле для среднего значения кинетической энергии поступательного движения молекулы:

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT. \quad (10,2)$$

Как мы видим, средняя энергия молекулы не зависит от ее природы и пропорциональна температуре газа T . Средняя энергия E всех газовых молекул в сосуде равна сумме энергий поступательного движения всех молекул, поскольку взаимодействие между ними отсутствует:

$$E = N\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} NkT, \quad (10,3)$$

где N — полное число молекул в газе.

Энергия данной порции идеального газа не зависит от объема сосуда и определяется только абсолютной температурой¹⁾.

¹⁾ Может показаться, что независимость средней энергии газовой молекулы от размеров сосуда противоречит квантовой формуле для энергии (1,11), согласно которой $\epsilon_n \sim \frac{1}{a^2}$, где a — линейный размер сосуда. Нужно, однако, помнить, что средняя энергия определяется интегралом от произведения энергии на число квантовых состояний. Последнее согласно (1,24) пропорционально $\Omega(\epsilon) d\epsilon \sim V \sqrt{\epsilon} d\epsilon \sim a^3 \frac{\Delta\epsilon}{a} \sim a^2 d\epsilon$. Это приводит к независимости энергии от объема.

Мы будем отождествлять эту среднюю энергию механического движения молекул газа с макроскопической тепловой энергией. В связи с этим абсолютную температуру мы должны с кинетической точки зрения трактовать как величину, характеризующую среднюю энергию движения молекул. В настоящее время такая трактовка является единственно возможной. В следующей главе мы подробно остановимся на обсуждении этих утверждений.

Полученные выражения для средней энергии отдельной молекулы и газа в целом могут быть интерпретированы следующим образом. Каждая молекула имеет три степени свободы, и ее движение может быть разложено на движение в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В силу равноправия всех направлений в пространстве средняя энергия движения в каждом направлении должна быть одинаковой. Таким образом, формула (10,2) означает, что на каждую степень свободы в среднем приходится энергия, равная $\frac{1}{2}kT$. Это утверждение является частным случаем весьма общего закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы. В § 39 мы подробно обсудим этот закон и укажем границы его применимости.

Представляет интерес установить связь между энергией газа ϵ и его давлением p .

Записав выражение (8,2) в виде

$$\begin{aligned}
 p &= 2n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} (mv_x^2) dv_x = \\
 &= \frac{4n}{3} \left[\left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{mv_x^2}{2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_y dv_z + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{mv_y^2}{2} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_x^2+v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_z + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{mv_z^2}{2} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2kT}} dv_x dv_y \right] = \\
 &= \frac{2n}{3} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv^2}{2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z = \\
 &= \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{\overline{mv^2}}{2} \right) = \frac{2}{3} \frac{N\bar{\epsilon}}{V} = \frac{2}{3} \frac{E}{V}, \quad (10,4)
 \end{aligned}$$

мы видим, что давление идеального газа оказывается численно равным $2/3$ от кинетической энергии поступательного движения молекул газа, находящихся в единице объема.

Наконец, найдем скорость молекул газа $v_{п.в.}$, при которой максвелловское распределение имеет максимум, т. е. наиболее вероятную скорость. Для нахождения ее ищем максимум функции распределения, который определяется из условия

$$\frac{d}{dv} \left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right) = 0.$$

Легко находим

$$v_{п.в.} = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (10,5)$$

Сравнивая (10,5) с (10,1), мы видим, что средняя скорость молекул на 13% больше наиболее вероятной.

Часто вводят также понятие о средней квадратичной скорости $\sqrt{\overline{v^2}}$, характеризующей энергию газовых молекул. В силу (10,2) эта величина равна

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}} = 1,22 \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (10,6)$$

Средняя квадратичная скорость на 22% больше наиболее вероятной. Это вполне естественно, так как вклад быстрых молекул в энергию должен быть больше, чем вклад медленных.

§ 11. Столкновения молекул между собой

Рассмотрим две молекулы, движущиеся в идеальном газе со скоростями v_1 и v_2 . Очевидно, что для столкновения этих молекул друг с другом абсолютные величины и направления скоростей сами по себе не играют роли. Важно лишь, как происходит движение одной молекулы по отношению к другой. Если, например, обе молекулы движутся по прямой одна вслед за другой, то столкновение в единицу времени произойдет в том случае, если вторая молекула успеет за 1 секунду «догнать» первую молекулу. Скорости движения обеих молекул в пространстве по отношению к стенкам сосуда не играют роли.

Таким образом, при решении вопроса о столкновениях нужно рассмотреть их относительное движение. В § 42 ч. I было показано, что движение двух частиц можно всегда разложить на движение в пространстве общего центра тяжести и их относительное движение.

Напишем вероятность того, что первая молекула имеет скорость v_1 , а вторая v_2 , в виде

$$d\omega_{12} = d\omega_1 d\omega_2 = \left(\frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_1 v_1^2}{2kT}} d\mathbf{v}_1 \left(\frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}} d\mathbf{v}_2.$$