§ 12. Длина свободного пробега

Найдем теперь средний путь, проходимый молекулой между двумя последовательными соударениями, именуемый средней длиной свободного пробега.

За одну секунду молекула проходит в пространстве путь, равный в среднем $\bar{v}$. При этом она испытывает ν столкновений. Средняя длина пути между столкновениями равна

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu} = \frac{\bar{v}}{n\sigma\bar{v}_{\text{отн}}} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}}. \qquad (12,1)$$

Длина пробега λ в среднем пропорциональна отношению среднего пути, проходимого в единицу времени молекулой, к числу испытываемых ею соударений. Поэтому величину λ именуют средней длиной свободного пробега. Средняя длина свободного пробега λ оказывается обратно пропорциональной плотности газа n и эффективному сечению σ.

Формула (12,1) дает среднюю длину свободного пробега. Часто, однако, важно знать, какова вероятность того, что молекула пройдет произвольный путь x, не испытав ни одного столкновения. Иными словами, представляет интерес закон распределения вероятностей для пробега молекул. Обозначим через $w(x)$ вероятность того, что молекула пролетит расстояние x, не испытав ни одного столкновения.

Соответственно $w(x+dx)$ представляет вероятность того, что молекула пролетит путь $(x+dx)$, не испытав ни одного соударения.

Прохождение пути $x+dx$ представляет сложное событие, состоящее из двух независимых этапов: пролета пути x без столкновений и последующего пролета пути dx также без столкновений.

Поскольку эти события являются независимыми, можно написать

$$w(x+dx) = w(x)\,w(dx). \qquad (12,2)$$

Последнюю вероятность удобно переписать в другом виде. Очевидно, что вероятность $w(dx)$ того, что на бесконечно малом пути dx молекула испытает соударение, пропорциональна длине dx и может быть представлена в виде $a\,dx$, где a — некоторый коэффициент пропорциональности. Вероятность того, что молекула пролетит путь dx без столкновений, равна

$$w(dx) = 1 - w(dx) = 1 - a\,dx.$$

Подставляя это в (12,2), находим

$$w(x+dx) = w(x)(1 - a\,dx). \qquad (12,3)$$

Разлагая $w(x+dx)$ в ряд по степеням dx и ограничиваясь бесконечно малыми величинами первого порядка малости, имеем

$$w(x+dx)=w(x)+\frac{dw}{dx}dx,$$

откуда, подставляя в (12,3), получаем

$$dw=-aw(x)dx.$$

Интегрируя, находим

$$w(x)=Ae^{-ax}.$$

Для определения произвольной постоянной A заметим, что вероятность того, что молекула пролетит как угодно малый путь без столкновений, равна единице:

$$w(x\to 0)=1.$$

Отсюда следует, что $A=1$ и окончательно

$$w(x)=e^{-ax}. \tag{12,4}$$

Для определения смысла постоянной величины a найдем среднюю длину свободного пробега λ, пользуясь формулой (12,4).

По определению, средняя длина свободного пробега λ равна

$$\lambda=\int_0^\infty x\,dP, \tag{12,5}$$

где dP — вероятность того, что молекула, пройдя без столкновений путь x, испытает соударение на отрезке x, $x+dx$. Согласно предыдущему можно написать

$$dP=w(x)w(dx)=w(x)a\,dx=ae^{-ax}dx. \tag{12,6}$$

Подставляя значение dP в (12,5), находим

$$\lambda=a\int_0^\infty xe^{-ax}dx=\frac{1}{a}. \tag{12,7}$$

Таким образом, постоянная a оказывается величиной, обратной средней длине свободного пробега.

Формулу (12,4) для вероятности того, что молекула пролетит путь x, не испытав ни одного соударения, можно переписать в виде

$$w(x)=e^{-\frac{x}{\lambda}}. \tag{12,8}$$

Эта вероятность оказывается экспоненциально убывающей функцией расстояния. Подчеркнем, что $w(x)$ дает вероятность пролета молекулой пути x без столкновений, независимо от того, в каком месте она испытала последнее соударение. Это означает, что расстояние x отсчитывается от произвольной точки, а не от места последнего соударения.

Вероятность того, что молекула пролетит путь без соударения и столкнется на участке x, $x + dx$, согласно (12,6) и (12,7), равна

$$dP = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx. \tag{12,9}$$

Формула (12,8) важна для экспериментального определения средней длины свободного пробега молекул в газе. Представим себе узкий направленный пучок молекул, выходящий в некоторый откачанный до сравнительно низкого давления сосуд, содержащий охлаждаемую пластинку, помещаемую на пути пучка на расстояниях x_1 и x_2 от входного отверстия. Молекулы, пролетевшие пути x_1 и x_2 без соударений, будут достигать пластинки, образуя на ней осадок. Отношение числа частиц, осевших на пластинке в обоих положениях, равно, согласно (12,8),

$$\frac{N(x_1)}{N(x_2)} = \frac{e^{-\frac{x_1}{\lambda}}}{e^{-\frac{x_2}{\lambda}}}. \tag{12,10}$$

Измеряя числа $N(x_1)$ и $N(x_2)$ и считая приближенно, что λ одинакова для всех молекул в пучке, с помощью (12,10) можно определить λ.

В соответствии с требованиями теории, λ оказывается обратно пропорциональной плотности или, что то же самое, давлению газа. По порядку величины λ составляет около 10 *см* при $p \sim 10^{-3}$ *мм* ртутного столба и около 10^{-5} при атмосферном давлении.