Другим случаем квантового (вырожденного) газа является случай фотонного газа, свойства которого будут обсуждаться в § 76.

Мы не останавливаемся здесь более подробно на свойствах распределения Бозе и Ферми, поскольку целесообразнее обсудить их на реальных физических системах (электронный и фотонный газы).

Для всех обычных газов отличие квантовой статистики от классической при не особенно больших значениях температур и плотности оказывается ничтожно малым. Оба квантовых распределения, Бозе и Ферми, с большой степенью точности можно заменить распределением Максвелла. Отсутствие какого-либо различия между статистикой Бозе и Ферми станет понятным, если учесть, что среднее число частиц $\bar{n}_k$ в отдельном квантовом состоянии по порядку величины оценивается следующими соотношениями:

$$\bar{n}_k \approx e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}} \approx e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1.$$

В невырожденном газе при высокой температуре и малой плотности газа плотность заполнения состояний очень мала. В каждом состоянии в среднем находится гораздо меньше одной частицы, поэтому не играет роли, могут ли в одно состояние попасть две и более частиц или нет, все равно они практически никогда не попадают в него даже попарно.

Несмотря на то, что к атомным газам всегда можно применять классическую статистику (точнее, квазиклассическую статистику, поскольку учет дискретных уровней энергии и введение множителя $1/N!$ являются неизбежными), только создание квантовой статистики позволило решить целый ряд важнейших физических вопросов. Некоторые из них будут изложены в последующих параграфах.

§ 73. Излучение черного тела

Статистическая теория излучения сыграла огромную роль в создании квантовой теории. Классическая электромагнитная теория света, объяснявшая широкий круг явлений, связанных с распространением света, и получившая всеобщее признание в конце XIX века, в начале XX века столкнулась с непреодолимыми трудностями в связи с вопросом об излучении света, и в частности, с вопросом о тепловом излучении. Под тепловым излучением мы понимаем всю совокупность излучения, испускаемого нагретым телом.

Как известно, характер излучения света, и в частности, его интенсивность, а также зависимость интенсивности от частоты (спектральный состав излучения) определяются температурой и природой излучающего тела.

Имеется, однако, случай, когда спектральный состав излучения не зависит от природы излучателя и определяется исключительно его температурой. Речь идет о так называемом равновесном излучении.

Представим себе некоторую замкнутую полость со стенками, не проводящими тепла и поддерживаемыми при определенной температуре T. Стенки полости будут излучать и поглощать электромагнитные волны.

Поскольку все электромагнитное излучение заключено в замкнутую полость, через некоторое время в системе установится состояние статистического равновесия. Стенки полости будут излучать в единицу времени столько же электромагнитной энергии, сколько они поглощают. В полости будет существовать неизменная во времени система стоячих электромагнитных волн.

Плотность энергии соответствующего электромагнитного поля внутри полости будет выражаться формулой (12,6) ч. I:

$$\rho = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}.$$

Тепловое излучение будет содержать разнообразные частоты. Плотность энергии $\rho(\nu)$, приходящаяся на данный интервал частоты $d\nu$, будет, очевидно, различна для разных частот. Плотность энергии излучения данной частоты будет зависеть также от температуры излучающих стенок T. Таким образом,

$$\rho = \rho(\nu,\ T).$$

Простое термодинамическое рассуждение показывает, однако, что $\rho(\nu,\ T)$ не зависит от природы излучателя, в частности, стенок (их поглощательных и излучательных свойств, состояния поверхности и т. п.).

Рассмотрим две полости, стенки которых нагреты до одинаковой температуры, но сделаны из различных материалов. Предположим, что спектральная плотность энергии излучения зависит от природы излучателя и различна в обеих полостях. Тогда, соединив обе полости, можно нарушить равновесие. Излучение будет переходить в ту полость, в которой его плотность меньше. В результате этого плотность излучения в этой полости вырастет, стенки полости будут поглощать больше излучения, а их температура повысится; между стенками обеих полостей возникает разность температур, которая может быть использована для получения полезной работы.

Сделанное нами предположение приводит к выводу о возможности самопроизвольного нарушения равновесия в замкнутой системе и возможности построения вечного двигателя второго рода, что, как известно, невозможно. Таким образом доказано, что спектральное распределение плотности энергии равновесного излучения $\rho(\nu, T)$ является универсальной функцией частоты ν и температуры T.

Изучение излучательных и поглощательных свойств материальных тел привело Кирхгофа к установлению весьма важной теоремы, получившей название теоремы Кирхгофа.

Назовем излучательной способностью произвольного тела величину $E(\nu)$, равную энергии, излучаемой 1 *см*^{2} поверхности тела за 1 секунду с частотой между ν и $\nu+d\nu$ в единичном интервале частоты.

Назовем, далее, поглощательной способностью тела долю всей падающей на 1 *см*^{2} поверхности тела лучистой энергии с частотой между ν и $\nu+d\nu$, которая поглощается внутри тела [1]) в единичном интервале частоты.

Теорема Кирхгофа гласит, что отношение излучательной и поглощательной способностей $E(\nu)/A(\nu)$ является универсальной функцией частоты и температуры тела, но не зависит ни от природы и свойств тел, ни от их геометрических размеров, т. е.

$$\frac{E(\nu)}{A(\nu)} = f(\nu, T). \qquad (73,1)$$

Оказывается, что универсальная функция $f(\nu, T)$ связана простым соотношением с плотностью энергии равновесного излучения $\rho(\nu, T)$ (T — температура тела):

$$f(\nu, T) = \frac{c}{4\pi}\rho(\nu, T),$$

где c — скорость света. Итак, теорема Кирхгофа может быть записана в виде

$$\frac{E(\nu)}{A(\nu)} = \frac{c}{4\pi}\rho(\nu, T).$$

Доказательство теоремы Кирхгофа, имеющее весьма общий характер, может быть найдено в любом курсе теории света [2]).

Поскольку поглощательная способность тела может быть найдена без особого труда из измерения коэффициентов поглощения и геометрических соображений, нахождение вида функции $\rho(\nu, T)$ представляло весьма существенный интерес. Из формулы Кирхгофа (73,1) вытекает, что особое значение имеет

---

[1]) Не смешивать с коэффициентом поглощения, который характеризует поглощение света на единицу пути в веществе. Величина поглощательной способности характеризует поглощение во всем объеме тела.

[2]) См., например, М. Планк, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935.

тело с поглощательной способностью $A(\nu)$, равной единице. Такое тело поглощает всю падающую на него электромагнитную энергию любых частот. Оно было названо абсолютно черным телом.

Для абсолютно черного тела имеем

$$E(\nu) = \frac{c}{4\pi}\rho(\nu,\ T). \tag{73,2}$$

Формула (73,2) показывает, что абсолютно черное тело имеет бо́льшую излучательную способность, чем все другие тела. Его излучательная способность является универсальной функцией частоты ν и температуры T.

Измеряя излучательную способность абсолютно черного тела, можно на опыте определить вид функции $\rho(\nu,\ T)$.

Разумеется, все тела, существующие в природе, не являются абсолютно черными. Какова бы ни была природа поверхности тела, некоторая часть падающей на нее лучистой энергии отражается. Однако абсолютно черным телом является замкнутая полость, заполненная излучением, которую мы рассматривали выше. Действительно, все излучение, испускаемое стенками полости, ими же и поглощается. Если сделать в полости маленькое отверстие, то изучая спектральное распределение лучистой энергии, выходящей из отверстия, можно экспериментально найти функцию $\rho(\nu,\ T)$. Размеры отверстия должны быть достаточно малы, чтобы утечка энергии через отверстие не приводила к существенному отклонению от состояния равновесия. С помощью подобного рода модели абсолютно черного тела было экспериментально изучено спектральное распределение энергии при различных температурах.

На рис. 75 (см. стр. 656) приведены типичные кривые подобного рода. По оси абсцисс отложена длина волны выходящего излучения, по оси ординат — плотность энергии излучения $\rho(\lambda T)$ с длиной волны, лежащей между λ и $\lambda + d\lambda$. Плотность энергии излучения с данной длиной волны связана с $\rho(\nu,\ T)$ следующим соотношением:

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu = \rho(\lambda,\ T)\,d\lambda.$$

Учитывая, что

$$d\nu = c\left|\frac{d\lambda}{\lambda^2}\right|,$$

имеем

$$\rho(\lambda,\ T) = \frac{c}{\lambda^2}\rho(\nu,\ T).$$

Различные кривые на рис. 75 относятся к различным температурам. Все кривые обнаруживают характерный ход. При больших длинах волн плотность излучения увеличивается с ростом λ, при некоторой длине волны $\lambda_{макс}$ она проходит через максимум и вновь стремится к нулю со стороны коротких волн. Положение максимума сдвигается в сторону коротких волн по мере повышения температуры.

§ 74. Классическая теория черного излучения

Перейдем теперь к вычислению функции спектрального распределения $\rho(\nu, T)$.

Электромагнитное излучение в замкнутой полости образует систему стоячих волн. Такое электромагнитное поле было рассмотрено нами в § 38 ч. I, где было показано, что оно может быть заменено набором эквивалентных осцилляторов поля. Энергия поля оказалась равной сумме энергий осцилляторов. В случае излучения в полости ему, в соответствии со сказанным выше, следует приписать температуру, равную температуре излучающих стенок T. Мы можем поэтому сказать, что каждой стоячей волне в полости соответствует один осциллятор с частотой ν и энергией $\varepsilon(\nu, T)$, зависящей от частоты, а также от температуры T.

Каждый из осцилляторов, заменяющих систему стоячих волн, может находиться в различных состояниях и иметь различную энергию $\varepsilon(\nu, T)$. Нас, однако, будет интересовать не мгновенная, а средняя энергия осцилляторов $\overline{\varepsilon(\nu, T)}$; здесь усреднение ведется по всем возможным состояниям осциллятора. Энергия стоячих волн в единице объема полости, частоты которых заключены между ν и $\nu+d\nu$, численно равна суммарной средней энергии всех осцилляторов, заменяющих нормальные колебания и имеющих частоты в том же интервале. Если $g(\nu)d\nu$ — число осцилляторов, то сказанное можно записать в виде

$$\rho(\nu, T)d\nu=\overline{\varepsilon(\nu, T)}g(\nu)d\nu. \tag{74,1}$$

Число собственных колебаний было найдено нами в § 38 ч. I. В случае электромагнитных волн нужно только учесть, что они являются поляризованными и могут иметь два направления поляризации. Формула (38,22) ч. I дает число колебаний с частотой между ν и $\nu+d\nu$ для каждого вида поляризации. Для обоих видов поляризации число колебаний нужно удвоить:

$$\rho(\nu, T)\,d\nu=\frac{8\pi\bar{\varepsilon}}{c^3}\nu^2\,d\nu. \tag{74,2}$$

Формула (74,2) при своем выводе не потребовала привлечения каких-либо представлений из квантовой теории, она была получена до создания квантовой теории. Для средней энергии