соответствующее число осцилляторов электромагнитного поля в бесконечно большое число раз больше, чем число осцилляторов, требуемых для описания теплового движения в кристалле. В состоянии равновесия вся энергия должна содержаться у поля, поскольку на каждый осциллятор должна приходиться одинаковая энергия.

Этот результат находится в полном противоречии с опытными данными. Опыт показывает, что плотность тепловой энергии, заключенной в излучателе, неизмеримо выше, чем плотность энергии электромагнитного поля; например, при $T=300°$ K плотность тепловой энергии в твердом теле оказывается в 10^{14} раз больше измеренной плотности энергии внутри полости с излучением. Что касается спектрального распределения плотности энергии, выражаемого формулой (74,3), то оно оказывается в согласии с измеренным распределением энергии в спектре черного тела для малых частот, удовлетворяющих условию $h\nu \ll kT$. Наоборот, при больших частотах, когда $h\nu \gg kT$, рост $\rho(\nu, T)$ с частотой ν происходит гораздо медленнее, чем по закону ν^2.

Таким образом, закон равномерного распределения при его применении к проблеме излучения черного тела приводит к полному расхождению теории с экспериментом в области больших частот. Исторически это было первым хорошо изученным случаем полной непригодности классических представлений. Вопиющее противоречие с опытом, к которому привела классическая статистика, побудило современников называть создавшееся положение «ультрафиолетовой катастрофой». Выход из противоречия был найден в создании квантовой теории.

§ 75. Формула Планка

Простейший, хотя и не самый прозрачный с физической стороны способ получения функции спектрального распределения $\rho(\nu, T)$ с учетом квантования заключается в следующем.

Подставим в формулу (74,2) значение средней энергии осциллятора поля, вычисленное по теории квантового осциллятора. При этом опустим нулевую энергию осциллятора $h\nu/2$, выбирая ее за начало отсчета энергии. Тогда

$$\varepsilon = nh\nu \tag{75,1}$$

и

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu \sum n e^{-\frac{h\nu n}{kT}}}{\sum e^{-\frac{h\nu n}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{75,2}$$

Подставив (75,2) в формулу (74,2), находим следующее выражение для средней энергии электромагнитного поля в пустоте в единице объема для частоты, лежащей между ν и $\nu+d\nu$:

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu = \frac{8\pi h\nu^3\,d\nu}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)} \qquad (75,3)$$

Формула (75,3) получила название формулы Планка. Формула Планка впервые была выведена полуэмпирически, поскольку неизвестна была формула (75,2) для энергии осциллятора. Наоборот, последняя формула и входящая в нее постоянная Планка h были найдены из опыта.

В двух предельных случаях, $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ и $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$, формула Планка упрощается. В первом случае

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

и формула (75,3) сводится к виду

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu \approx \frac{8\pi kT}{c^3}\,\nu^2\,d\nu, \qquad (75,4)$$

т. е. переходит в классическую формулу (74,3) для средней плотности энергии черного излучения.

При $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \approx e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

так что

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu \approx \frac{8h\nu^3}{c^3}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu. \qquad (75,5)$$

Последняя формула носит название закона Вина.

Переходя от $\rho(\nu,\ T)$ к спектральному распределению плотности излучения по длинам волн $\rho(\nu,\ T)$, можем написать формулы (75,3), (75,4) и (75,5) в следующем виде:

$$\rho(\lambda,\ T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}, \qquad (75,6)$$

$$\rho(\lambda,\ T) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \qquad \left(\frac{hc}{kT\lambda} \ll 1\right), \qquad (75,7)$$

$$\rho(\lambda,\ T) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,e^{-\frac{hc}{kT\lambda}} \qquad \left(\frac{hc}{kT\lambda} \gg 1\right). \qquad (75,8)$$

Кривые, отвечающие формуле (75,6), изображены на рис. 75. При больших длинах волн $\rho(\lambda, T)$ падает с увеличением волны, как $1/\lambda^4$; при малых длинах волн $\rho(\lambda, T)$ стремится к нулю, как $\frac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}}$. Функция $\rho(\lambda, T)$ имеет максимум при длине волны $\lambda_{\text{макс}}$, которую можно найти из условия

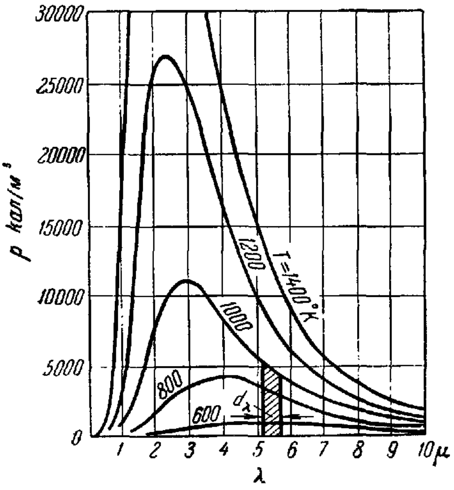

Рис. 75.

$$\frac{\partial \rho(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0$$

или

$$-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} + \frac{hce^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{\lambda^7 kT \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)^2} = 0.$$

Обозначив через x величину $\frac{hc}{kT\lambda_{\text{макс}}}$, можно записать последнее уравнение в виде

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 5.$$

Решение этого трансцендентного уравнения дает

$$x = 4{,}96,$$

$$\lambda T \approx 2 \cdot 10^{-3} \frac{hc}{k}. \qquad (75,9)$$

Формула (75,9) показывает, что положение максимума плотности энергии черного излучения смещается в сторону малых длин волн с ростом температуры. Это — так называемый закон смещения.

Из закона смещения может быть определено значение квантовой постоянной h. После выбора ее значения формула Планка оказывается в отличном согласии с экспериментальными данными.

§ 76. Статистика фотонного газа

Как мы уже указывали в вводной главе, современная квантовая теория в согласии с опытными фактами утверждает, что наряду с волновыми свойствами излучение обладает также и свойствами корпускулярными. Хотя с точки зрения обыденных