Кривые, отвечающие формуле (75,6), изображены на рис. 75. При больших длинах волн $\rho(\lambda, T)$ падает с увеличением волны, как $1/\lambda^4$; при малых длинах волн $\rho(\lambda, T)$ стремится к нулю, как $\frac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}}$. Функция $\rho(\lambda, T)$ имеет максимум при длине волны $\lambda_{\text{макс}}$, которую можно найти из условия

$$\frac{\partial \rho(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0$$

или

$$-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} + \frac{hc e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{\lambda^7 kT \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)^2} = 0.$$

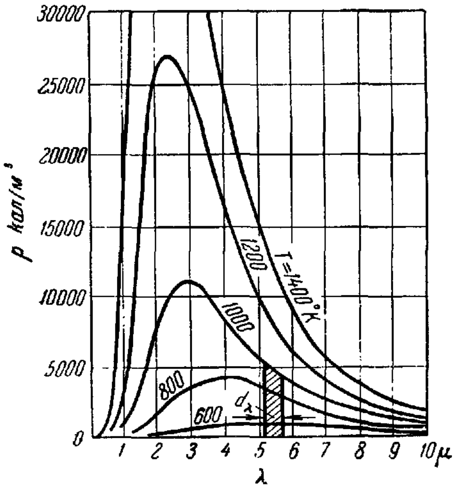

Рис. 75.

Обозначив через x величину $\frac{hc}{kT\lambda_{\text{макс}}}$, можно записать последнее уравнение в виде

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 5.$$

Решение этого трансцендентного уравиения дает

$$x = 4{,}96,$$

$$\lambda T \approx 2 \cdot 10^{-3} \frac{hc}{k}. \qquad (75{,}9)$$

Формула (75,9) показывает, что положение максимума плотности энергии черного излучения смещается в сторону малых длин волн с ростом температуры. Это — так называемый закон смещения.

Из закона смещения может быть определено значение квантовой постоянной h. После выбора ее значения формула Планка оказывается в отличном согласии с экспериментальными данными.

§ 76. Статистика фотонного газа

Как мы уже указывали в вводной главе, современная квантовая теория в согласии с опытными фактами утверждает, что наряду с волновыми свойствами излучение обладает также и свойствами корпускулярными. Хотя с точки зрения обыденных представлений невозможно сочетать в одном объекте свойства волны и частицы, для объяснения различных оптических явлений приходится пользоваться то волновым, то корпускулярным аспектом. Так, например, в явлениях интерференции или дифракции проявляется волновая природа излучения, тогда как при фотоэффекте или рассеянии жестких рентгеновских лучей проявляется корпускулярная природа. С корпускулярной точки зрения излучение можно рассматривать как поток световых квантов, или фотонов, движущихся в пространстве со скоростью света c. Фотоны возникают при излучении и исчезают при поглощении света атомами, причем их энергия равна $\varepsilon = \Delta E$, где ΔE — разность энергетических уровней излучающей системы.

Все фотоны движутся в пустоте с одинаковой скоростью, но различные фотоны могут иметь разную энергию и импульс. Энергия и импульс фотонов связаны между собой соотношением

$$\varepsilon = pc, \tag{76,1}$$

которое является общей формулой, связывающей эти величины для любого объекта, движущегося со скоростью света. Энергия и импульс фотона зависят от частоты по формулам:

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \tag{76,2}$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{76,3}$$

Подобно другим материальным частицам фотоны обладают моментом количества движения (ср. § 1, а также ч. V).

Оказывается, что при излучении механический момент излучающей системы (атома, молекулы) должен обязательно уменьшаться на величину, кратную $\hbar$. Соответствующий момент уносится улетающим фотоном. Таким образом, момент количества движения, выраженный в единицах $\hbar$, является целочисленным. Как и все другие частицы с целочисленным моментом, фотоны подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

С корпускулярной точки зрения равновесное излучение, заполняющее замкнутую полость, нужно рассматривать как некоторый фотонный газ, заполяющий объем сосуда V. Частицы фотонного газа беспорядочно движутся по всем направлениям в сосуде, причем направления их полета изменяются при столкновениях со стенками сосуда. Взаимодействие между фотонами отсутствует. Поэтому фотонный газ по своим свойствам должен быть сходен с обычным молекулярным идеальным газом, заполняющим замкнутый сосуд.

Однако наряду со сходством между фотонным и молекулярным газами имеется и очень существенное различие. Наиболее существенное отличие фотонного газа от молекулярного заключается в том, что в случае фотонного газа нельзя говорить о фиксированном числе частиц. В отличие от обычных частиц (электронов, протонов или атомов), фотоны могут создаваться или исчезать в момент испускания или поглощения света атомами. Поэтому число фотонов, находящихся в полости, нельзя считать заданным.

Другим отличием фотонов от газовых молекул является то, что все они движутся с одинаковыми скоростями. В действительности, однако, это свойство фотонного газа не связано со специфической природой фотонов. При очень больших значениях кинетической энергии любых частиц их скорости приближаются к скорости света и различия в скорости отдельных частиц постепенно сглаживаются. Поэтому последнее отличие фотонного газа от молекулярного является несущественным. Важно лишь, что в фотонном газе, так же как в молекулярном, имеется некоторое распределение частиц по импульсам и энергиям.

Наконец, между фотонным газом и газом обычных частиц существует еще одно отличие, имеющее скорее принципиальный, нежели практический характер. Как было показано в § 6 и 16, установление распределения молекул по скоростям (или импульсам) тесно связано с взаимодействием между ними, происходящим при молекулярных столкновениях. Фотоны же вовсе не сталкиваются между собой. Равновесное распределение между фотонами может установиться только в том случае, если в полости превращение фотонов одних частот в фотоны других частот. При этом число фотонов не должно оставаться постоянным, но должна сохраняться их полная энергия. Таким телом, в частности, могут служить стенки полости, заполненной «фотонным газом».

Мы покажем сейчас, что, исходя из представлений о фотонном газе, можно с таким же успехом прийти к формуле Планка, как и при использовании волновой картины.

С корпускулярной точки зрения функцию $\rho(\omega, T)$ можно интерпретировать следующим образом.

Пусть в интервале частот ω, $\omega + d\omega$ или соответствующем ему интервале энергий фотонов ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ в единице объема имеется $d\Omega$ квантовых состояний фотонов. Пусть, далее, среднее число фотонов в каждом состоянии равно $\bar{n}(\varepsilon)$. Тогда среднее число фотонов с энергией между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ равно

$$d\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)\,d\Omega. \tag{76,4}$$

Их средняя энергия равна $\varepsilon\bar{n}(\varepsilon)\,d\Omega$. Но эта энергия представляет не что иное, как энергию излучения с частотой между ω и $\omega + d\omega$. Таким образом,

$$\rho(\varepsilon, T)\,d\omega = \varepsilon\bar{n}(\varepsilon)\,d\Omega. \tag{76,5}$$

Нашей задачей является нахождение $\bar{n}(\varepsilon)$, т. е. среднего числа частиц в газе с переменным числом частиц. Учитывая, что фотоны являются частицами со спином, равным единице, для $\bar{n}(\varepsilon)$ можно написать распределение Бозе — Эйнштейна.

Необходимо, однако, учесть особенность фотонного газа, связанную с возможностью поглощения и излучения фотонов стенками сосуда или материальными телами, находящимися внутри полости.

Число частиц в фотонном газе является переменным и зависит от состояния газа. Поэтому в отличие от обычного молекулярного газа свободная энергия фотонного газа зависит не только от переменных V и T, но также и от числа частиц в газе N. При данном значении V и T число фотонов в состоянии равновесия будет иметь такое значение N_0, чтобы свободная энергия $F(V, T, N_0)$ имела минимальное значение. Таким образом, можно утверждать, что равновесное состояние фотонного газа имеет место при выполнении равенства

$$\frac{\partial F(V, T, N)}{\partial N} = \mu(V, T) = 0. \tag{76,6}$$

При этом мы воспользовались формулой (60,3′).

Уравнение (76,6) показывает, что парциальный потенциал равновесного фотонного газа равен нулю.

Таким образом, среднее число частиц фотонного газа в единице объема, обладающих энергией ε, в силу (72,7) и (76,6) следует написать в виде

$$\bar{n}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \tag{76,7}$$

Число фотонов с энергией между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ равно

$$d\bar{n}(\varepsilon) = \frac{2}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \frac{4\pi p^2\, dp}{h^3} = \frac{8\pi}{h^3c^3} \frac{\varepsilon^2\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \tag{76,8}$$

Множитель 2 введен для того, чтобы учесть факт двукратного вырождения состояний фотонов с заданным импульсом p. Данному значению p отвечают два состояния, соответствующих двум возможным поляризациям света.

Полное число фотонов в равновесном излучении может быть найдено интегрированием (76,8) по всем значениям ε.

Воспользовавшись формулой (76,2), можно выразить ε через частоту ω. Делая эту замену и переходя от числа фотонов к их энергии, находим

$$\rho(\omega, T)\, d\omega = \varepsilon\bar{n}(\varepsilon)\, d\Omega = \frac{8\pi}{h^3c^3} \frac{\varepsilon^3\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega^3\, d\omega}{\pi^2c^3\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)}, \tag{76,9}$$

т. е. формулу Планка.

Нужно подчеркнуть, что если бы к фотонам было применено распределение Больцмана, а не распределение Бозе — Эйнштейна, то вместо формулы Планка получилась бы формула (75,5), справедливая только при $\frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1$. Действительно, подставляя вместо $\bar{n}(\varepsilon)$ из (76,7) выражение $\bar{n} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$, вместо формулы Планка (76,9) получим закон Вина (75,5).

Таким образом, применять к фотонам классическую статистику нельзя. Область применимости классической статистики к фотонному газу ограничена условием $\frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1$. Это условие является обратным по сравнению с условием применимости классической статистики к осцилляторам электромагнитного поля. Итак, при больших частотах (или низких температурах) у излучения преобладают корпускулярные свойства; при малых частотах (или высоких температурах), наоборот, преобладают волновые свойства.

Энергия электромагнитного излучения или энергия фотонного газа в единице объема получается из (76,9) интегрированием по всем частотам:

$$u = \int_0^\infty \rho(\omega,\ T)\, d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3\, d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Для вычисления интеграла введем новую переменную, $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$. Тогда

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1}.$$

Значение последнего интеграла получено в приложении IV:

$$\int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$u = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15 (\hbar c)^3} = \alpha T^4. \qquad (76,10)$$

Энергия черного излучения оказывается пропорциональной четвертой степени абсолютной температуры (закон Стефана — Больцмана).

Входящая в (76,10) постоянная α содержит только универсальные константы $\hbar$, c и k. Закон Стефана — Больцмана широко применяется в теплотехнике для расчета излучающей способности нагретых поверхностей. Хотя излучатели, встречающиеся на практике, не являются черным телом, применение закона Стефана — Больцмана приводит к хорошим результатам для всех твердых излучателей, кроме металлов. У последних излучаемая энергия растет, как более высокая степень температуры.

Полная энергия излучения в объеме V равна

$$E = \alpha V T^4. \tag{76,11}$$

Найдем, далее, свободную энергию черного излучения. По формуле (30,12) имеем

$$F = -T \int \frac{E\,dT}{T^2} = -\frac{\alpha V T^4}{3}. \tag{76,12}$$

Энтропия излучения равна

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{3}\alpha V T^3. \tag{76,13}$$

Давление излучения p равно

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{\alpha T^4}{3} = \frac{E}{3V}. \tag{76,14}$$

Давление излучения впервые было обнаружено П. Н. Лебедевым. Это открытие имело большое принципиальное значение. Оно позволило доказать невозможность построения вечного двигателя второго рода, в котором в качестве рабочего вещества использовалось бы излучение.

Световое давление, весьма малое в земных условиях, приобретает чрезвычайно важное значение в астрофизике. Как показывает формула (76,14), световое давление чрезвычайно быстро увеличивается с ростом температуры. При весьма высоких температурах, имеющих место в астрофизических условиях, световое давление оказывается бо́льшим, чем газовое давление, и играет основную роль в ряде разнообразных астрофизических процессов.

Наконец, простое вычисление показывает, что термодинамический потенциал Φ излучения равен нулю:

$$\Phi = F + pV = 0.$$

Это согласуется с нашим требованием $\mu = 0$ для фотонного газа.