Вместе с тем нужно иметь в виду, что кроме коротко- и длинноволновых квантов возбуждения в жидкости имеются и кванты промежуточных длин волн, но число таких квантов сравнительно невелико. Кванты возбуждения, как мы только что подчеркивали, движутся по всему объему тела, не взаимодействуя (при малых возбуждениях) друг с другом, подобно частицам идеального газа, заполняющего объем тела. Если длинноволновые кванты возбуждения можно уподобить фотонам, коротковолновые кванты ведут себя, как обычные частицы идеального газа, обладающие массой μ.

Во избежание каких-либо недоразумений, подчеркнем еще раз, что эта аналогия имеет лишь математический характер. В действительности каждый квант возбуждения представляет особый вид движения всех атомов жидкости. Нельзя поэтому представлять коротковолновый квант возбуждения как реальную частицу, движущуюся в жидкости. Однако математическая аналогия между набором квантов возбуждения и идеальным газом позволяет легко найти термодинамические функции жидкого гелия.

§ 78. Статистическая теория жидкого гелия II

Наличие в жидком гелии II квантов теплового возбуждения означает, с макроскопической точки зрения, существование у него свободной энергии F, которую можно считать слагающейся из свободной энергии, обязанной своим происхождением существованию длинно- и коротковолновых квантов возбуждения:

$$F = F_{д} + F_{к}. \tag{78,1}$$

Напишем выражение для каждого из слагаемых в отдельности.

Свободную энергию длинноволновых квантов $F_{д}$ можем сразу написать по аналогии со свободной энергией твердого тела при низкой температуре, учитывая, что теперь могут существовать только продольные волны, а поперечные отсутствуют. Таким образом,

$$3N = \frac{4\pi V \nu_{макс}^3}{3c^3}, \tag{78,2}$$

где N — число атомов жидкости в объеме V, $\nu_{макс}$ — максимальная частота звуковых волн и c — скорость звука.

Поэтому, подставляя в (53,7) значение $\theta_c = \frac{h\nu_{макс}}{k}$ и учитывая (78,2), находим для $F_{д}$:

$$F_{д} = -\frac{4}{45}\frac{\pi^5 (kT)^4 V}{h^3 c^3}. \tag{78,3}$$

Несколько более сложным является вычисление $F_к$. Коротковолновые кванты ведут себя подобно частицам идеального газа. Их энергию, определяемую формулой (77,3), при достаточно низких температурах, когда еще можно говорить о независимых элементарных возбуждениях, можно считать большой по сравнению с kT. Для этого во всяком случае должно выполняться неравенство

$$\varepsilon(p_0) \gg kT.$$

Мы увидим ниже, что последнее неравенство действительно выполнено в жидком гелии II. Поэтому функция распределения коротковолновых квантов имеет вид классического больцмановского распределения. Свободная энергия классического идеального газа (с учетом тождественности частиц) имеет вид

$$F_к = -N_к kT \ln\left(\frac{eV}{N_k}\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3}\right) \tag{78,4}$$

$$(d\gamma = dp_x\,dp_y\,dp_z),$$

где $N_к$ — число коротковолновых квантов возбуждения. Значение $N_к$ не является, однако, определенной величиной, но зависит от температуры жидкости. Оно возрастает с увеличением возбуждения, т. е. с повышением температуры жидкости[1]). При данной температуре число коротковолновых квантов возбуждения определяется из условия минимума свободной энергии:

$$\frac{\partial F_k}{\partial N_k} = 0. \tag{78,5}$$

Подставляя (78,4) в условие (78,5), находим для числа коротковолновых квантов выражение

$$N_k = V\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3}. \tag{78,6}$$

Подставляя N_k в (78,4), находим для свободной энергии

$$F_к = -kTV\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3}. \tag{78,7}$$

Вычислим интеграл, входящий в (78,7). Очевидно, имеем

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3} = 4\pi\int e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}}\frac{p^2\,dp}{h^3} =$$

$$= 4\pi e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}\int e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}}\frac{p^2\,dp}{h^3}.$$

---

[1]) Зависимость $N_к$ от температуры лишний раз позволяет убедиться в том, что трактовка элементарных возбуждений как квазичастиц имеет условный характер.

Пределы интегрирования по импульсу кванта возбуждения точно не определены. Поскольку, однако, подынтегральное выражение быстро убывает с возрастанием разности $(p-p_0)$ и при $\frac{(p-p_0)^2}{2\mu} \gg kT$ практически обращается в нуль, можно распространить пределы интегрирования до $\pm\infty$. Тогда имеем

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{d\gamma}{h^3} = 4\pi e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}} \frac{p^2\,dp}{h^3}.$$

Поскольку подынтегральная функция обращается в нуль при $\frac{(p-p_0)^2}{2\mu} \gg kT$, медленно меняющуюся функцию p^2 можно вынести за знак интеграла, взяв ее в точке $p = p_0$. При этом

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{d\gamma}{h^3} = 4\pi p_0^2 e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}} \frac{dp}{h^3} = \frac{4\pi p_0^2 \sqrt{2\pi\mu kT}}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \tag{78,8}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$F_{\text{к}} = -\frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\,(kT)^{3/2} V p_0^2}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}, \tag{78,9}$$

$$N_{\text{к}} = \frac{4\pi p_0^2 V \sqrt{2\pi\mu kT}}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \tag{78,10}$$

Подставляя значения $F_{\text{д}}$ и $F_{\text{к}}$ из (78,3) и (78,9) в (78,1), находим выражение для свободной энергии жидкого гелия II:

$$F = -\frac{4}{45}\frac{\pi^5 (kT)^4 V}{h^3 c^3} - \frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\,(kT)^{3/2} V p_0^2}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \tag{78,11}$$

Соответственно энтропия и теплоемкость гелия II равны

$$S = \frac{16}{45}\frac{\pi^5 k^4 T^3 V}{h^3 c^3} + \frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\, p_0^2 k^{3/2} T^{1/2} V}{h^3}\left\{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon(p_0)}{kT}\right\} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}, \tag{78,12}$$

$$C_V = \frac{16}{15}\frac{\pi^5 k^4 T^3 V}{h^3 c^3} + \frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\, p_0^2 k^{3/2} T^{1/2} V}{h^3}\left\{\frac{3}{4} - \frac{\varepsilon}{2kT} + \frac{\varepsilon^2}{k^2 T^2}\right\} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \tag{78,13}$$

Мы видим, что все термодинамические величины слагаются из двух частей, обязанных своим происхождением длинноволновым и коротковолновым квантам возбуждения. Первая часть изменяется с температурой по такому же степенному закону, как и в случае кристаллов, вторая зависит от температуры экспоненциально, т. е. пропорционально $\exp\left\{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}\right\}$. Значения постоянных были определены из измерений энтропии и теплоемкости гелия II и оказались равными

$$\frac{\varepsilon(p_0)}{k}=9{,}6^\circ\ \mathrm{K},\quad \frac{p_0}{h}=12{,}25\cdot 10^8\ \text{см}^{-1},$$

$$\mu=0{,}75m_{\mathrm{He}}.$$

При таком значении постоянных степенная часть теплоемкости и энтропии превышает экспоненциальную при температурах, меньших примерно 1° К. Наоборот, при больших температурах преобладает экспоненциальная (коротковолновая) часть. Температурный ход термодинамических величин находится в полном согласии с опытом.

Самой замечательной особенностью жидкого гелия II, которая была открыта П. Л. Капицей, является присущее ему свойство «сверхтекучести». Именно, измерения вязкости гелия II, протекающего через тонкие щели и капилляры, показали, что она исчезающе мала. Благодаря этому гелий II практически беспрепятственно «проваливается» через тончайшие капилляры. Следствием сверхтекучести гелия II является его необычайно высокая теплопроводность («сверхтеплопроводность»), обнаруженная экспериментально ранее, чем сама сверхтекучесть. Благодаря исчезающей вязкости в гелии II возникают характерные конвекционные потоки, которые позволяют переносить значительные количества тепла в таких условиях, в которых обычная вязкая жидкость, лишенная конвекционного перемешивания, имеет ничтожно малую теплопроводность. Явление сверхтекучести находит полное разъяснение в изложенной выше теории. Оно оказывается тесно связанным с характером энергетического спектра гелия II.

Рассмотрим течение гелия II вдоль некоторой твердой стенки. Для удобства рассуждений перейдем к системе отсчета, в которой гелий покоится, а движется твердая стенка. С точки зрения квантов возбуждения всякий процесс рассеяния энергии, обусловленный вязкостью, можно рассматривать следующим образом. В выбранной нами системе отсчета энергия гелия первоначально задана и определяется количеством элементарных тепловых возбуждений. Взаимодействие между стенкой, увлекающей гелий, и жидкостью приводит к появлению в пристеночном слое жидкости дополнительного внутреннего движения. Это внутреннее движение представляет тепловое движение частиц жидкости. Таким образом, рассеяние энергии состоит в появлении в жидкости квантов возбуждения (теплового движения). Будем считать вначале, что в гелии II не было первоначально квантов возбуждения, т. е. что его температура T равна нулю. Пусть в гелии возник квант возбуждения с импульсом p и энергией $\varepsilon(p)$. При этом внутренняя энергия гелия станет равной $\varepsilon(p)$. В системе отсчета, в которой гелий течет, а стенка неподвижна, его энергия по правилам преобразования энергии при относительном движении равна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \varepsilon(p) + \boldsymbol{pv}, \tag{78,14}$$

где v — скорость течения, $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия жидкости, а $\varepsilon(p) + \boldsymbol{pv}$ — изменение ее энергии.

При рассеянии энергии кинетическая энергия текущей жидкости может только уменьшаться, т. е. $\varepsilon + \boldsymbol{pv} < 0$. Наименьшее значение величины $(\varepsilon + \boldsymbol{pv})$ достигается при возникновении кванта с импульсом $\boldsymbol{p}$, направленным антипараллельно к $\boldsymbol{v}$. Она равна при этом $\varepsilon - pv$. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$\varepsilon - pv < 0$$

или

$$v > \frac{\varepsilon}{p}. \tag{78,15}$$

Последнее означает, что если $\frac{\varepsilon}{p} \neq 0$, в текущем гелии могут возникать кванты возбуждения, и рассеяние энергии может иметь место только при достаточно большой скорости течения. При скорости течения, не удовлетворяющей неравенству (78,15), взаимодействие между стенкой и гелием, сопровождающееся появлением квантов теплового возбуждения, возникать не может.

Из вида энергетического спектра гелия II, представленного на рис. 77 (стр. 665), ясно, что величина $\frac{\varepsilon}{p}$ для гелия II всегда отлична от нуля. Таким образом, при температуре абсолютного нуля жидкий гелий II движется мимо твердой стенки без взаимодействия и рассеяния энергии, если только скорость движения его не превышает $v_0 = \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\text{мин}}$, где $\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\text{мин}}$ — минимальное значение отношения $\frac{\varepsilon}{p}$. В этом и состоит явление сверхтекучести.

При $T \neq 0$ все прежние рассуждения остаются в силе и в гелии II не могут возникать новые кванты возбуждения при $v \neq v_0$. Однако уже имеющиеся кванты теплового возбуждения могут взаимодействовать с твердой стенкой.

Оказывается, что в гелии II при $T \neq 0$ возможны два вида движения, которые могут происходить в одной порции жидкости одновременно и независимо друг от друга, — сверхтекучее и нормальное. Сверхтекучее происходит без вязкости и не сопровождается переносом энергии теплового возбуждения. Нормальное течение происходит так же, как обычное течение жидкости с вязкостью, отличной от нуля. С каждым из видов движения связан перенос части массы гелия. Благодаря этому гелий II можно наглядно, хотя и не строго, рассматривать как смесь двух жидкостей — сверхтекучей и нормальной. Движение сверхтекучей жидкости, несущей часть гелия II при $T \neq 0$, происходит так же, как движение всего гелия II при $T = 0$. Однако при $T \neq 0$ часть массы гелия находится в нормальном состоянии, течет с трением и несет с собой тепло. В опытах с течением гелия через тонкий капилляр проявляются свойства сверхтекучей части. Она вытекает через тончайший капилляр, не испытывая никакого сопротивления. В опытах с движением тел, например, в опытах с колебаниями диска, погруженного в сосуд с гелием, наблюдается взаимодействие с нормальной частью гелия. При этом движение диска происходит как в нормальной жидкости, обладающей вязкостью. Однако масса нормальной жидкости оказывается зависящей от температуры. При $T \to 0$ масса нормальной части гелия II также обращается в нуль.

Одним из замечательных тепловых свойств гелия II является так называемый термомеханический эффект. Термомеханический эффект состоит в том, что при вытекании гелия из сосуда через весьма тонкий капилляр температура гелия, остающегося в сосуде, повышается. Наоборот, при втекании гелия температура в сосуде понижается.

Происхождение термомеханического эффекта понятно из предыдущего. Через тонкий капилляр движется сверхтекучая часть гелия, которая не несет тепловой энергии. При вытекании некоторой сверхтекучей массы гелия из сосуда имевшийся ранее запас тепловой энергии распределяется в оставшейся массе и ее температура повышается. При вытекании имеет место обратное явление: запас тепловой энергии, имевшейся первоначально у гелия в сосуде, распределяется между всем гелием. Величина эффекта возрастает с понижением температуры. Это позволяет использовать термомеханический эффект в гелии для получения сверхнизких температур.

§ 79. Электронный газ в металле при абсолютном нуле

Рассмотрим теперь поведение Ферми — системы — электронного газа при низких температурах. Во втором томе, при изложении квантовой теории металлов мы покажем, что в известном приближении совокупность электронов в металлах можно считать идеальным вырожденным Ферми — газом. Поэтому свойства Ферми — газа представляют очень большой интерес.