нормальное. Сверхтекучее происходит без вязкости и не сопровождается переносом энергии теплового возбуждения. Нормальное течение происходит так же, как обычное течение жидкости с вязкостью, отличной от нуля. С каждым из видов движения связан перенос части массы гелия. Благодаря этому гелий II можно наглядно, хотя и не строго, рассматривать как смесь двух жидкостей — сверхтекучей и нормальной. Движение сверхтекучей жидкости, несущей часть гелия II при $T \neq 0$, происходит так же, как движение всего гелия II при $T = 0$. Однако при $T \neq 0$ часть массы гелия находится в нормальном состоянии, течет с трением и несет с собой тепло. В опытах с течением гелия через тонкий капилляр проявляются свойства сверхтекучей части. Она вытекает через тончайший капилляр, не испытывая никакого сопротивления. В опытах с движением тел, например, в опытах с колебаниями диска, погруженного в сосуд с гелием, наблюдается взаимодействие с нормальной частью гелия. При этом движение диска происходит как в нормальной жидкости, обладающей вязкостью. Однако масса нормальной жидкости оказывается зависящей от температуры. При $T \to 0$ масса нормальной части гелия II также обращается в нуль.

Одним из замечательных тепловых свойств гелия II является так называемый термомеханический эффект. Термомеханический эффект состоит в том, что при вытекании гелия из сосуда через весьма тонкий капилляр температура гелия, остающегося в сосуде, повышается. Наоборот, при втекании гелия температура в сосуде понижается.

Происхождение термомеханического эффекта понятно из предыдущего. Через тонкий капилляр движется сверхтекучая часть гелия, которая не несет тепловой энергии. При вытекании некоторой сверхтекучей массы гелия из сосуда имевшийся ранее запас тепловой энергии распределяется в оставшейся массе и ее температура повышается. При вытекании имеет место обратное явление: запас тепловой энергии, имевшейся первоначально у гелия в сосуде, распределяется между всем гелием. Величина эффекта возрастает с понижением температуры. Это позволяет использовать термомеханический эффект в гелии для получения сверхнизких температур.

§ 79. Электронный газ в металле при абсолютном нуле

Рассмотрим теперь поведение Ферми — системы — электронного газа при низких температурах. Во втором томе, при изложении квантовой теории металлов мы покажем, что в известном приближении совокупность электронов в металлах можно считать идеальным вырожденным Ферми — газом. Поэтому свойства Ферми — газа представляют очень большой интерес.

Обсудим прежде всего поведение электронного газа при абсолютном нуле. Для этого напишем распределение Ферми, имеющее согласно (72,11) вид·

$$dn = n\frac{d\gamma}{h^3} = 2\cdot 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}. \tag{79,1}$$

Множитель 2 введен для учета того, что каждому энергетическому уровню отвечает два состояния, в которых могут находиться электроны со спинами, имеющими противоположные ориентации

Перейдем в (79,1) к пределу $T\to 0$. Тогда распределение Ферми, изображенное (при $T\neq 0$) на рис. 74, приобретает вид, представленный на рис 79 и выражаемый формулами

$$n=\begin{cases}1 & \varepsilon\leqslant\mu\,(T=0)=\varepsilon_{max},\\ 0 & \varepsilon>\mu\,(T=0)=\varepsilon_{max},\end{cases} \tag{79,2}$$

где $\mu(T=0)$ означает химический потенциал при абсолютном нуле. Эту величину принято именовать максимальной энергией при абсолютном нуле ε_{max}. Этот результат имеет простой смысл: уровни энергии системы большого числа электронов, свободно движущихся в конечном объеме V, ограниченном непроницаемым энергетическим барьером (стенками), образуют почти непрерывный спектр.

Рассмотрим прежде всего поведение электронов в металле при весьма низких температурах, близких к абсолютному нулю.

Предположим, что все атомы при образовании металла превращаются в ионы, причем каждый атом ионизован однократно. Число свободных электронов в металле будет равно числу атомов Эти электроны движутся совершенно хаотически и образуют электронный газ. Плотность этого газа будет чрезвычайно велика — число частиц в единице объема будет в несколько тысяч раз превышать число частиц в обычном, не очень разреженном газе Тем не менее, мы будем полностью пренебрегать взаимодействием между электронами.

Иными словами, мы будем считать электроны в металле идеальным газом. Оказывается, что теория, основывающаяся на этом предположении, дает объяснение очень большому числу фактов и находится в хорошем количественном согласии с опытом. Это показывает, что в действительности взаимодействие между электронами в металле не играет большой роли. Взаимодействие между электронами компенсируется взаимодействием электронов с ионами решетки. В ч. VI мы подробно осветим вопрос о взаимодействии электронов с ионами решетки и между собой.

Электроны распределяются по всему объему металла равномерно. Уровни энергии системы, состоящей из очень большого числа электронов, образуют почти непрерывный спектр. На каждом уровне энергии согласно принципу запрета может одновременно находиться не более двух электронов с противоположными ориентациями спина. Два электрона в металле будут заполнять самое нижнее энергетическое состояние с энергией,

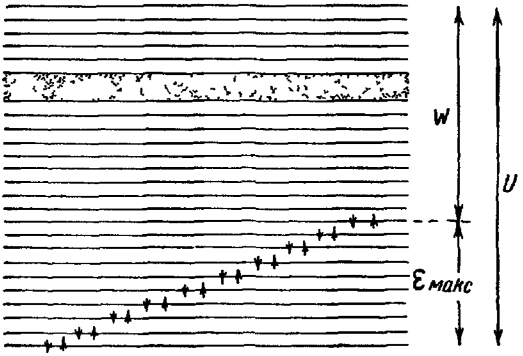

Рис. 78

равной нулю. Третий и четвертый электроны вынуждены уже находиться на первом возбужденном уровне. Следующие электроны располагаются на более высоких энергетических уровнях, причем каждая пара электронов заполняет соответствующий уровень Если полное число электронов в металле равно N, то при абсолютном нуле будут заполнены первые $N/2$ состояния с энергиями $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_{макс}$. Все остальные состояния с $\varepsilon > \varepsilon_{макс}$ будут свободны от электронов. Это схематически изображено на рис. 78.

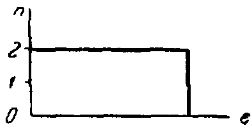

Рис. 79

На рис. 79 представлена функция распределения электронов по состояниям при $T = 0$. Число электронов во всех заполненных состояниях равно двум, в незаполненных оно равно нулю. Очевидно, что благодаря принципу запрета электроны вынуждены попадать в возбужденные энергетические состояния даже при абсолютном нуле.

Найдем энергию $\varepsilon_{макс}$ последнего, самого высокого из заполненных энергетических состояний электронов при абсолютном нуле. Поскольку уровни энергии электронов в металле распределены почти непрерывно, мы можем написать для числа уровней энергии одного электрона, лежащих в интервале энергии ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ выражение (1,24) ч. III. На каждом уровне энергии находится два электрона, так что для полного числа заполненных уровней имеем:

$$4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon = N,$$

откуда

$$N = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m\varepsilon_{\text{макс}}}{h^2}\right)^{3/2} = \frac{8\pi V}{3h^3} p^3_{\text{макс}}$$

или

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{79,3}$$

Энергия всех электронов при абсолютном нуле, очевидно, равна

$$E_0 = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon = \frac{3}{5} N\varepsilon_{\text{макс}}. \tag{79,4}$$

Средняя энергия отдельного электрона в электронном газе при $T = 0$ составляет $^3/_5$ от максимальной энергии $\varepsilon_{\text{макс}}$.

Подстановка численных значений величин, входящих в (79,3), дает, например, при $\frac{N}{V} \sim 10^{19}$: $\varepsilon_{\text{макс}} = 5$ *эв* или $\varepsilon_{\text{макс}} = 6{,}0 \cdot 10^4$ *град*. Можно найти также максимальную скорость электронов при абсолютном нуле:

$$v_{\text{макс}} = \frac{p_{\text{макс}}}{m} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{\text{макс}}}{m}} = 1{,}39 \cdot 10^8 \text{ см/сек}. \tag{79,3'}$$

Скорости электронов оказываются очень большими даже при абсолютном нуле.

Мы видим, что свойства электронного газа коренным образом отличаются от свойств классического атомного газа.

Энергия электронного газа оказывается пропорциональной числу электронов N в степени $^5/_3$ и объему, заполненному электронным газом, в степени $(-^2/_3)$. Электроны при абсолютном нуле не находятся в состоянии покоя, как это следовало бы ожидать, исходя из классических представлений, а движутся с различными скоростями. Средняя скорость этого движения весьма велика. Несмотря на это, теплоемкость электронного газа при абсолютном нуле оказывается точно равной нулю. Действительно,

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{T=0} = 0,$$

поскольку энергия газа не зависит от температуры.

Электроны, движущиеся в металле, как и всякий другой газ, оказывают давление на стенки сосуда. Для давления газа можно сразу написать выражение (8,2):

$$p = \frac{2mN}{V} \int_0^\infty v_x^2 \rho(v_x)\, dv_x = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}, \tag{79,5}$$

так как все направления движения электронов равноправны и $\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$. Для $\overline{v^2}$ нужно подставить выражение

$$\overline{v^2} = \frac{2E_0}{mN}, \tag{79,6}$$

где E_0/N — средняя энергия, приходящаяся на один электрон. Тогда получаем:

$$p = \frac{2}{3}\frac{E_0}{V}. \tag{79,7}$$

Этот же результат можно получить и термодинамическим путем.

Подстановка численных значений дает для $\frac{N}{V} = 10^{19}$:

$$p = 2 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

В ходе предыдущих рассуждений мы молчаливо предполагали, что электронный газ является идеальным газом Ферми, в котором можно полностью пренебрегать взаимодействием между частицами. Законность такого допущения может показаться весьма сомнительной, особенно если учесть, что плотность вырожденного газа весьма велика и он состоит из заряженных частиц, для которых взаимодействие медленно убывает с расстоянием.

Предположение об идеальности газа выполнено, если средняя кинетическая энергия электрона весьма велика по сравнению со средней энергией его взаимодействия с другими частицами.

Средняя кинетическая энергия электрона дается формулой (79,4). Энергия взаимодействия двух электронов по порядку величины равна $e^2/\bar{r}$, где $\bar{r}$ — среднее расстояние между ними. Если N/V — число электронов и ионов в единице объема, то среднее расстояние $\bar{r}$ равно по порядку величины

$$\bar{r} \approx \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}.$$

Критерий малости энергии взаимодействия можно записать в виде

$$\frac{e^2}{\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}} \ll \varepsilon_{\text{макс}}.$$

Поскольку $\varepsilon_{\text{макс}} \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}$, то, производя несложные преобразования, получаем:

$$\frac{N}{V} \gg \left(\frac{e^2 m}{h^2}\right)^3.$$

При большой плотности электронного газа отношение энергии взаимодействия к кинетической энергии может оказаться малым.

Поскольку кинетическая энергия газа растет с плотностью быстрее, чем потенциальная, мы приходим к парадоксальному на первый взгляд результату:

для того, чтобы электронный газ можно было считать идеальным газом, его плотность должна быть достаточно велика.

§ 80. Электронный газ при низких температурах

Рассмотрим теперь свойства электронного газа при температурах, отличных от нуля, но являющихся еще достаточно низкими. Именно, предположим, что температура такова, что kT значительно меньше, чем максимальная энергия электронов при абсолютном нуле $\varepsilon_{\text{макс}}$. В этом случае тепловое возбуждение электронного газа будет сравнительно незначительным. Это означает, что тепловое возбуждение может переводить электроны из энергетических состояний, заполненных при $T = 0$, только в близлежащие более высокие энергетические состояния. Ясно, например, что тепловое возбуждение недостаточно для того, чтобы поднять электрон с уровня энергии $\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{макс}}$ на уровень энергии $\varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}}$. Его хватает лишь на возбуждение электронов, находящихся на энергетических уровнях, лежащих в узком интервале порядка kT. Часть электронов с этих уровней оказывается переброшенной на уровни, лежащие выше уровня $\varepsilon = \varepsilon_{\text{макс}}$, но отстоящие от него не выше, чем kT.

На рис. 80 схематически изображено тепловое возбуждение при низкой температуре. Часть уровней, лежащих ниже $\varepsilon_{\text{макс}}$, оказывается освобожденной чаще всего от одного из заполняющих их электронов; на уровнях, лежащих выше $\varepsilon_{\text{макс}}$, появляются одиночные электроны. Функция распределения электронов по состояниям изменяется. Если при $T = 0$ она представлялась ломаной кривой (рис. 79), то при низкой, но отличной от нуля температуре она принимает вид, изображенный на рис. 81. Распределение при $T = 0$ показано на рис. 81 ломаной. Падение