где S означает поверхность тела и значение P_n берется на самой поверхности. Ввиду произвольного характера поверхности тела из равенства

$$\oint_S P_n\,dS = \int \omega_S\,dS$$

следует, что

$$\omega_S = P_n. \tag{2,5}$$

Ясно, что полный заряд электронейтрального тела, помещенного во внешнее поле, остается равным нулю. Выбирая в (2,4) поверхность интегрирования вне объема тела, можно написать

$$\int \rho_{\text{связ}}\,dV = -\int \operatorname{div}\boldsymbol{P}\,dV = -\int P_n\,dS = 0.$$

Таким образом, полный объемный связанный заряд, возникающий в теле, равен полному заряду, индуцированному на его поверхности.

До сих пор мы считали тело электронейтральным. Если полный свободный заряд тела отличен от нуля и распределен в нем с объемной плотностью ρ, то полная средняя плотность заряда

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{связ}} + \rho$$

и

$$\int \bar{\rho}\,dV = \int (\rho_{\text{связ}} + \rho)\,dV = \int \rho\,dV = e. \tag{2,6}$$

Заряд тела, характеризуемый плотностью ρ, не связан с атомами вещества и не индуцируется внешним полем. Ниже мы увидим, что в постоянном поле свободный заряд ρ может существовать только у диэлектриков. В проводниках свободные заряды подвижны и смещаются до тех пор, пока не выходят на его поверхность, образуя поверхностный заряд.

§ 3. Средняя плотность тока и средняя плотность заряда в среде

Несколько более сложной задачей является вычисление средней плотности тока в среде $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$. Это вычисление может быть проведено либо на основе некоторых модельных представлений, либо, более формально, исходя из общих представлений об электромагнитных свойствах среды.

Мы изберем здесь второй путь, поскольку используемые обычно при изложении макроскопической электродинамики модели атомов и молекул не только далеки от действительности, но и по необходимости содержат явно неверные допущения Как будет пояснено ниже, квантовые эффекты играют основную роль в магнитных свойствах атомов. Поэтому нельзя проводить рассмотрение электрических и особенно магнитных свойств атомных систем на основе классических моделей. При формальном рассмотрении мы можем ограничиться лишь одним физическим допущением: если некоторое тело помещено во внешнее электромагнитное поле, то среднее поле в объеме тела мало по сравнению с внутриатомными полями. Иными словами, мы будем предполагать, что средние поля внутри тела являются слабыми. Кроме того, мы ограничимся случаем однородных и изотропных тел.

Средняя плотность тока в среде $\overline{\rho v}$ в каждой точке тела является функцией напряженностей электрического и магнитного полей. Кроме того, если поля изменяются в пространстве и во времени, средняя плотность тока будет зависеть от скорости изменения векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ во времени и пространственных производных этих величин, т. е.

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = f\left(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \frac{\partial E}{\partial t},\ \frac{\partial B}{\partial t},\ \frac{\partial E_l}{\partial x_k},\ \frac{\partial H_l}{\partial x_k}\right). \tag{3,1}$$

Поскольку поля являются слабыми, можно разложить функцию f в ряд по степеням переменных и ограничиться первыми степенями разложения[1]). По существу это разложение производится по степеням малого отношения типа $\frac{|E|}{|E_{\text{вн. ат}}|}$, где $E_{\text{вн. ат}}$ — напряженность внутриатомного поля.

Разлагая f в ряд по степеням переменных, мы должны учитывать, что $\overline{\rho v}$ является полярным вектором. Поэтому все члены ряда, выражающего искомое разложение, также должны представлять полярные векторы. Они не могут быть ни скалярами, ни аксиальными векторами.

Напомним (ср. § 6 ч. I), что напряженность электрического поля $\boldsymbol{e}$, а следовательно, и средняя напряженность электрического поля в среде $\boldsymbol{E}$ являются полярными векторами. Напротив, напряженность магнитного поля $\boldsymbol{h}$, а с ней и среднее магнитное поле $\boldsymbol{B}$ являются аксиальными векторами или псевдовекторами. Поэтому в искомом разложении может фигурировать вектор $\boldsymbol{E}$, но не вектор $\boldsymbol{B}$.

Производная вектора $\frac{\partial E}{\partial t}$ по времени является полярным вектором и должна быть первым членом разложения. Пространственные производные $\frac{\partial E_l}{\partial x_k}$ могут быть сгруппированы в виде двух комбинаций производных $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$. Первая комбинация производных $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ образует аксиальный вектор, вторая — скаляр. Обе величины в разложении сами по себе фигурировать

[1]) Ср. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1954, стр. 428.

не могут. Производные первого порядка от $\boldsymbol{B}$ суть: $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$. Величина $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ является аксиальным вектором, $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ в силу (1,15), $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ представляет полярный вектор. Поэтому в разложении f нужно удержать вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$. Таким образом, имеются только три величины первого порядка малости, являющиеся полярными векторами $\boldsymbol{E}$, $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$. Разумеется, в следующем приближении из скаляров и аксиальных векторов можно составить целый ряд полярных векторов, но члены разложения второго порядка нас интересовать не будут.

При разложении по степеням отношения $\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}_{\text{вн. ат}}|}$ нужно, вообще говоря, учитывать анизотропию тела, так как в разных направлениях $\boldsymbol{E}_{\text{вн. ат}}$ изменяется по разным законам. В изотропных телах (такими являются газы, жидкости и, в известном приближении, поликристаллические тела) можно считать отношение $\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}_{\text{вн. ат}}|}$ имеющим одно и то же значение во всех направлениях. Тогда с точностью до членов первого порядка малости

$$\overline{\rho\boldsymbol{v}}=\sigma\boldsymbol{E}+\varkappa\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\alpha c \operatorname{rot}\boldsymbol{B}, \tag{3,2}$$

где σ, $\varkappa$ и α — скаляры, зависящие от свойств среды. Причина, по которой в последнее слагаемое введен множитель c (скорость света), будет ясна из дальнейшего.

Нулевой член в разложении (3,2) отсутствует, поскольку отсутствию поля должен отвечать средний ток, равный нулю.

Прежде чем ввести это выражение для $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ в уравнения Максвелла, обсудим физический смысл отдельных членов разложения.

Первый член разложения $\sigma\boldsymbol{E}$ имеет весьма простой и наглядный смысл. Он показывает, что при наличии электрического поля в среде возникает ток, средняя плотность которого пропорциональна средней напряженности поля $\boldsymbol{E}$. Величина σ носит название проводимости или электропроводности тела.

Мы будем пользоваться обозначением

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}. \tag{3,3}$$

Вектор $\boldsymbol{j}$ представляет средний заряд, проходящий через 1 *см*^{2} поверхности, проведенной внутри тела перпендикулярно к $\boldsymbol{j}$, за 1 *сек*. Вектор $\boldsymbol{j}$ именуется плотностью тока проводимости. Соотношение (3,3) связывает плотность тока в данной точке тела с напряженностью поля в этой точке. Соотношение (3,3) мы будем называть законом Ома в дифференциальной форме. Ниже, в § 14, мы установим связь (3,3) с обычной формулировкой закона Ома.

Свойства тел характеризуются значением проводимости σ. В идеальных диэлектриках, в соответствии с их определением, следует положить $\sigma=0$. В реальных диэлектриках $\sigma \neq 0$, но весьма мало по сравнению с значением этой величины в полупроводниках и особенно в металлах.

Вопрос о проводимости в телах различной природы будет рассмотрен ниже. Пока отметим лишь, что за ток проводимости в теле ответственны свободные заряды: свободные электроны в металлах, ионы и электроны в газах, ионы в жидкостях. Свободными их именуют потому, что они не связаны с каким-либо атомом и под действием поля могут перемещаться по всему объему тела.

Среднюю плотность свободных зарядов в теле мы будем обозначать через ρ. Она связана, очевидно, с плотностью тока $\boldsymbol{j}$ уравнением непрерывности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{3,4}$$

При этом предполагается, что свободные заряды, имеющиеся в теле, не переходят в связанное состояние и не возникают из связанных зарядов.

Для выяснения физического смысла второго и третьего слагаемых в разложении (3,2) преобразуем (3,2) так, чтобы векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ были отделены один от другого. Возьмем, например, дивергенцию от обеих частей уравнения (3,2). Тогда имеем, очевидно,

$$\operatorname{div}\overline{\rho\boldsymbol{v}}=\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\varkappa\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E}.$$

В силу уравнений непрерывности для полного тока $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ и тока свободных зарядов $\boldsymbol{j}$, даваемых формулами (1,18) и (3,4),

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\bar\rho-\rho)=\varkappa\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E}. \tag{3,5}$$

Разность $\bar\rho-\rho$ равна, очевидно, средней плотности связанных зарядов $\rho_{\text{связ}}$. Таким образом, в однородной среде имеем

$$\frac{\partial\rho_{\text{связ}}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\varkappa\boldsymbol{E}.$$

Интегрируя, можно написать

$$\rho_{\text{связ}}=-\operatorname{div}\varkappa\boldsymbol{E}. \tag{3,6}$$

Постоянная интегрирования положена равной нулю, поскольку в отсутствие поля $\rho_{\text{связ}}$ должна быть равна нулю.

Сравнивая (3,6) с (2,3), мы убеждаемся, прежде всего, в существовании формулы

$$\boldsymbol{P} = \varkappa \boldsymbol{E}, \tag{3,7}$$

связывающей поляризацию в теле с напряженностью поля $\boldsymbol{E}$. Поляризация $\boldsymbol{P}$ оказывается пропорциональной полю $\boldsymbol{E}$. Коэффициент пропорциональности $\varkappa$ носит название коэффициента поляризации или диэлектрической восприимчивости вещества. Значение диэлектрической восприимчивости для тел, состоящих из простых молекул, будет вычислено в §§ 12 и 13. Там будет доказано, что $\varkappa$ является величиной существенно положительной, так что вектор $\boldsymbol{P}$ всегда направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{E}$.

В силу (3,7) второе слагаемое в (3,2) можно записать в виде

$$\varkappa \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}. \tag{3,8}$$

Формула (3,8) показывает, что изменение вектора поляризации во времени эквивалентно появлению некоторого тока. Этот ток именуется током поляризации, а его плотность

$$\boldsymbol{j}_{\text{пол}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}, \tag{3,9}$$

т. е. равна скорости изменения дипольного момента единицы объема, выбранного в данной точке тела.

Действительно, из определения (2,1) вектора $\boldsymbol{P}$ следует

$$\int \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}\, dV = \int \boldsymbol{r} \frac{\partial \rho_{\text{связ}}}{\partial t} dV. \tag{3,10}$$

При этом мы переменили порядок дифференцирования и интегрирования. Величина $\boldsymbol{r}$ представляет переменную интегрирования и от t не зависит.

Пользуясь (1,5) и применяя соотношение (2,2) к вектору $(\rho_{\text{связ}}\boldsymbol{v})$, находим

$$\int \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} dV = -\int \boldsymbol{r} \operatorname{div} (\rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v})\, dV = \int \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v}\, dV. \tag{3,11}$$

Смысл плотности тока связанных зарядов очень прост. Изменение во времени поляризации данного объема означает, что из него уходят (или в него входят) сказанные заряды. Ясно, однако, что перемещение связанных зарядов, с точки зрения переноса ими электричества, эквивалентно движению свободных зарядов.

Перейдем теперь к выяснению смысла последнего слагаемого в (3,2). Для этого умножим формулу (3,2) на $\boldsymbol{r}$ векторно и проинтегрируем результат по объему тела:

$$\int [\boldsymbol{r}, \overline{\rho \boldsymbol{v}}]\, dV = \int [\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}]\, dV + \int \left[\boldsymbol{r}, \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right] dV + \alpha c \int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{B}]\, dV.$$

В силу (3,10)

$$\int \left[\boldsymbol{r}, \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right] dV = \int \left[\boldsymbol{r}, \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}\right] dV = \frac{\partial}{\partial t} \int [\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}]\, dV = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_{\text{связ}} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}]\, dV = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha c \int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{B}]\, dV = \int [\boldsymbol{r}, \overline{\rho \boldsymbol{v}} - \boldsymbol{j}]\, dV = \int [\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v}]\, dV, \qquad (3,12)$$

где $\rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v} = \overline{\rho \boldsymbol{v}} - \boldsymbol{j}$ — плотность тока, переносимая связанными зарядами.

Введем обозначение

$$\boldsymbol{M} = \alpha \boldsymbol{B}. \qquad (3,13)$$

Тогда (3,12) запишется в виде

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = \frac{1}{c} \int [\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v}]\, dV. \qquad (3,14)$$

В силу формулы (I, 54), в которой $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{M}$,

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = - \int [[\boldsymbol{M}\nabla]\, \boldsymbol{r}]\, dV - \oint [[\boldsymbol{n}\boldsymbol{M}]\, \boldsymbol{r}]\, dS.$$

Если поверхность интегрирования проходит вне объема, занятого телом, то на этой поверхности $\boldsymbol{M}=0$, и, таким образом,

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = - \int [[\boldsymbol{M}\nabla]\, \boldsymbol{r}]\, dV.$$

При этом

$$[[\boldsymbol{M}\nabla]\, \boldsymbol{r}] = (\boldsymbol{M}\nabla)\, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{M} \operatorname{div} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{M} - 3\boldsymbol{M} = -2\boldsymbol{M}.$$

Отсюда окончательно

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = 2 \int \boldsymbol{M}\, dV. \qquad (3,15)$$

Сравнивая (3,15) с (3,14), получаем

$$\int \boldsymbol{M}\, dV = \int \frac{[\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v}]}{2c}\, dV. \qquad (3,16)$$

Равенство (3,16) показывает, что введенный соотношением (3,13) вектор $\boldsymbol{M}$ представляет средний магнитный момент единицы объема тела, создаваемый движущимися связанными зарядами (ср. § 22 ч. I).

Статистическая теория магнитных явлений будет изложена в гл. III.

С помощью величин $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$ средняя плотность тока в веществе может быть окончательно написана в виде

$$\overline{\rho\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}+c \operatorname{rot} \boldsymbol{M}. \tag{3,17}$$

§ 4. Система уравнений для электромагнитного поля в среде

Вычислив средние значения величины $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$, мы можем перейти к окончательной формулировке уравнений для электромагнитного поля в среде. Подставляя (3,17) в (1,16), находим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}+4\pi\operatorname{rot}\boldsymbol{M},$$

или

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M})=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}). \tag{4,1}$$

Введем новые обозначения, написав

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M} \tag{4,2}$$

и

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}-4\pi\boldsymbol{P}; \tag{4,3}$$

перепишем (4,1) в виде

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{4,4}$$

Обратимся теперь к уравнению (1,17). Выражая среднюю плотность заряда по формуле (2,6) через среднюю плотность свободного ρ и связанного $\rho_{связ}$ заряда и пользуясь (2,3), получаем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho+4\pi\rho_{связ}=4\pi\rho-4\pi\operatorname{div}\boldsymbol{P},$$

откуда в силу (4,3)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho. \tag{4,5}$$

Два оставшихся уравнения (1,14) и (1,15), как мы видели, усредняются без каких-либо трудностей,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4,6}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0. \tag{4,7}$$